Calcul Différentiel et Intégral II

Basé sur le cour de G. Dujardin

Table des matières

partie 1. Suites et Séries de fonctions et Intégration 1

Chapitre 1. Suites et Séries de fonctions 3
1. Rappels de Topologie métrique 3
2. Suite de fonctions et notion de convergence 4
3. L'espace vectoriel normé B(X;E) 5
4. Convergence uniforme sur les compacts 5
5. Suites de fonctions, intégrations et dérivations 6
6. Séries de fonctions 8
7. Séries de puissances 11

Chapitre 2. Intégration 17
1. Intégrale absolument convergente 17
2. Intégrales convergentes 25

Chapitre 3. Intégrales à paramètres 29
1. Résultats d'existence, continuité et dérivabilité 29
2. Intégrales définies sur un segment variable 30
3. Fonctions définies par des intégrales convergentes 33
4. Théorèmes de Fubini 34
5. Critère de convergence uniforme des intégrales. 36
6. Quelques applications. 38
7. Critère de compacité dans un espace de dimension non-finie 44

partie 2. Équations différentielles 49

Chapitre 4. Conditions suffisantes d'existence et d'unicité des solutions 51
1. Équations différentielles, formes résolues et réductions à l'ordre 1. 51
2. Existence et unicité locale 52
3. Existence et unicité globale 57
4. Flot d'une équation différentielle et intégrales premières 60

Chapitre 5. Systèmes d'équations différentielles linéaires 63
1. Existence et unicité des solutions globales 63
2. Système inhomogènes, Méthode de variation des constantes 68
3. Équations linéaires différentielles à coefficients constants 70

Première partie

Suites et Séries de fonctions et Intégration

Chapitre 1

Suites et Séries de fonctions

1. Rappels de Topologie métrique

1.1. Espaces métriques.

DÉFINITION 1. *Une distance sur un ensemble X est une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *telle que :*

(1) $\forall$ *x, y* $\in$ *X, d(x,y) = d(y,x)*

(2) $\forall$ *x, y* $\in$ *X, si d(x,y) = 0* $\Rightarrow$ *x = y*

(3) $\forall$ *x, y, z* $\in$ *X, d(x;y)* $\leq$ *d(x,z) + d(z,y)*

DÉFINITION 2. *Soit (X,d) un couple formé d'un ensemble X et d'une distance d sur X (i.e. un espace métrique). Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *une suite dans X.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers x si :* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tq* $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \epsilon$

PROPOSITION 1. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *et x, y* $\in X$ *tq,* (x_n) *converge vers x et* (x_n) *converge vers y alors x=y.*

DÉMONSTRATION. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et x, y $\in X$ comme dans l'énoncé. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, x_n)$. Par convergence de la suite vers x et y, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tq $d(x_n, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $d(x_n, y) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On trouve alors que d(x,y)$\leq \epsilon$, $\forall\epsilon > 0$, ce qui implique d(x,y)=0 et donc x=y. □

1.2. Espace Vectoriel Normé.

DÉFINITION 3. *Soit (E,+, .) un espace vectoriel sur un sous-corps* $\mathbb{K}$ *de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, on appelle norme sur E toute application* $N : E \to \mathbb{R}^+$ *tq :*

(1) $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

(2) $\forall x \in E\ N(x) = 0$ *ssi* $x = 0$

(3) $\forall x, y \in E\ : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

DÉFINITION 4. *Un espace vectoriel normé est un couple (E, N) d'un espace vectoriel E sur un sous-corps de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et d'une norme N sur E.*

PROPOSITION 2. *Soit (E,N) un espace vectoriel normé, soit* $X \subset E$*. Posons* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ : d(x, y) = N(x - y)$*. Alors (X, d) est un espace métrique.*

DÉFINITION 5. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E, N)^{\mathbb{N}}$ *converge vers x ssi :* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tq* $\forall n \geq N$, $N(x_n - x) \leq \epsilon$ [1]

DÉFINITION 6. *Soit (X, d) un espace métrique, soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$*. Cette suite est dite de Cauchy si* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m$, $n \geq N$, $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$

1. ici la notation est ambiguë, ne pas confondre le N de la norme et le N de la définition

Proposition 3. *Soit (x_n) une suite convergente de (X,d), un espace métrique. Alors (x_n) est de Cauchy.*

Définition 7. *Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit de Banach.*

1.3. Continuité.

Définition 8. *Soit $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ une fonction, soit $x \in X$. On dit que f est continue en x ssi $\forall$ suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n) \to x$ alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in X_2^{\mathbb{N}}$ converge vers f(x)*

Définition 9. *Soit $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$, une fonction et $X \subset X_1$. On dit que f est continue sur X ssi f est continue $\forall x \in X$*

2. Suite de fonctions et notion de convergence

2.1. Convergence simple.

Définition 10. *Soit X un ensemble, (Y, d), un espace métrique, $f_n : X \to (Y, d)$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X ssi $\forall x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (Y, d). Dans ce cas $f : X \to Y : x \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*

2.2. Convergence uniforme.

Définition 11. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un ensemble X dans un espace métrique (Y, d). On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers $f : X \to Y$ ssi :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ tq,\ si\ n \geq N,\ d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon\, \forall x \in X$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ si\ n \geq N,\ \sup_{x\in X}\{d(f_n(x),\ f(x))\} \leq \epsilon$$

Proposition 4. *Si (f_n) converge uniformément vers f, alors elle converge aussi simplement vers f.*

Proposition 5. *Soit (X, d_1) et (Y, d_2), deux espaces métriques, soit $f_n : X \to Y$ une suite de fonctions, soit $a \in X$ tq : $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a. Supposons que (f_n) converge uniformément vers $f : X \to Y$ sur X, alors f est continue en a*

Corollaire 1. *Si $(f_n) \overset{CVU}{\to} f$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^0(X;Y)$. Alors, $f \in C^0(X;Y)$*

Démonstration. Il faut montrer que : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mu \geq 0$, $\forall x \in X$, si d_1(x,a)$\leq \mu$ $\Rightarrow d_2$(f(x),f(a))$\leq \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$, nous remarquons que pour x$\in$X et n $\in$N :
$d_2(f(x), f(a)) \leq d_2(f(x), f_n(x) + d_2(f_n(x), f_n(a)) + d_2(f_n(a), f(a))$
Par CVU de f_n vers f sur X et par continuité de f_n en a, on sait qu'il existe N_1, N_2 et $N_3 \in$ N tels que
$\forall n \geq N_1,\ \sup\limits_{x\in X}\{f_n(x), f(x)\} \leq \frac{\epsilon}{3}$
$\forall n \geq N_2,\ \sup\limits_{x\in X}\{f_n(a), f(a)\} \leq \frac{\epsilon}{3}$
$\forall n \geq N_2,\ \sup\limits_{x\in X}\{f_n(a), f_n(x)\} \leq \frac{\epsilon}{3}$
$\Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$ □

3. L'espace vectoriel normé B(X ;E)

DÉFINITION 12. *Soit X, un ensemble, $(E;||.||_E)$ un espace vectoriel normé. On appelle ,espace de fonctions bornées de X dans E :*
B(X ;E)=$\{ f : X \to E$ *telle que* $\underset{x\in X}{sup}||f(x)||_E < \infty \}$
Pour $f \in$ *B(X ;E), on note :* $||f||_\infty = \underset{x\in X}{sup}||f(x)||_E$

PROPOSITION 6. *Si* $X \neq \varnothing$*, alors (B(X,E),* $||.||_\infty$*) est un espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION. Soit f, g $\in$ B(X,E) et soit λ, $\alpha \in$ K $\Rightarrow (\lambda f + \alpha g)$: X$\to$E. De plus, $\underset{x\in X}{sup}$ $||(\lambda f + \alpha g)(\mathrm{x})||_E = \underset{x\in X}{sup}$ $||\lambda f(x) + \alpha g(\mathrm{x})||_E \leq |\lambda|$ $\underset{x\in X}{sup}$ $||\mathrm{f(x)}||_E + |\alpha|$ $\underset{x\in X}{sup}$ $||\mathrm{f(x)}||_E = \leq \infty \Rightarrow (\lambda f + \alpha g) \in$ B(X,E). Enfin, $||.||\infty$ possède les propriété suivantes :

(1) $\forall$ f$\in$ B(X,E), $\forall$ $\lambda \in$ K : $||\lambda \mathrm{f}||_\infty = |\lambda|$ $||\mathrm{f}||_\infty$
(2) Si $||\mathrm{f}||_\infty = 0$ alors f=0
(3) $||\mathrm{f+g}||_\infty \leq ||\mathrm{f}||_\infty + ||\mathrm{g}||_\infty$

□

PROPOSITION 7. *Si* $X \neq \varnothing$ *alors (B(X,E),* $||.||_\infty$*) est de Banach* $\Leftrightarrow$ *(E,* $||.||_E$*) est de Banach*

DÉMONSTRATION. $\Rightarrow$[2] Soit $(e_n)_n \in$ E$^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit f_n : X $\to$ E : f_n(x) = e_n $\forall x \in$ X.
$(f_n)_n \in B^N$ est de Cauchy[3] et donc converge $\in$ B car B est de Banach.
Soit f, la limite de $(f_n)_n$, soit x, un élément fixé de X : $e_n = f_n(x) \to f(x) =: e$
Donc $(e_n)_n$ converge vers e et E est de Banach.

$\Leftarrow$ Soit$(f_n)_n \in$ B(X, E)$^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $||.||_\infty \Rightarrow \forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall$ n,m $\geq$ N, on a que $||f_n - f_m||_\infty \leq \epsilon$. Fixons x $\in X$, $\epsilon > 0$ et soit N correspondant $\Rightarrow \forall n, m \geq N$, on a que : $||f_n(x) - f_m(x)||_E \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \epsilon$. Donc $f_n(x)$ est de Cauchy. Or, (E, $||.||_E$) est de Banach donc $f_n(x)$ converge. Comme ceci est vrai $\forall x \in X$ nous pouvons définir une certaine fonction f qui envoie x sur la limite de $(f_n(x))_n$. Comme $||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon$ $\forall x \in X$, $\underset{x\in X}{sup}||f_n(x) - f(x)||_E \leq ||f_n(x) - f(x)||_E \leq \epsilon$. Donc $B(X, E)$ est de Banach. On peut justifier que f $\in$ $B(X, E)$ car f_n est bornée et tend vers f, donc f est bornée. □

4. Convergence uniforme sur les compacts

4.1. Rappels.

DÉFINITION 13. *Soit (X, d) un espace métrique, soit* $x \in X$ *et* $r \geq 0 \Rightarrow B(x, r[$ *:* $\{y\in X,\ d(x, y)<r\}$ *est la boule ouverte centré en x de rayon r.*

DÉFINITION 14. *La partie A de X est dite ouverte lorsque* $\forall x \in A$*,* $\exists r > 0 \subset A$

2. Cette démonstration n'a pas été faite au cour. Soyez prudent avec.
3. Nous laissons au lecteur le bon soin de le vérifier

DÉFINITION 15. *Une partie $K \neq \varnothing$ de X est dite compacte lorsque $\forall\ I \neq \varnothing$ ensembles, $\forall(\mathcal{O}_i \in I) \in \mathcal{P}(X)$ (:=ensemble des partie de X) ouverte tq $K \subset \cup_{i\in I}\mathcal{O}_i$, $\exists\ J \subset I$ tq J est fini et $K \subset \cup_{j\in J}\mathcal{O}_j$.*[4]

PROPOSITION 8. *Soit $K \neq \phi$ une partie de X : K est compact $\Leftrightarrow \forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, $\exists x \in K$ et $\exists\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tq $x_{\phi(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x$.*

PROPOSITION 9. *Si K est une partie compacte de X, alors X est fermé et borné*

PROPOSITION 10. *Si $X = \mathbb{R}^d$ ou $X = \mathbb{C}^d$ et $K \subset X$ est non-vide, fermé et borné, alors K est compact.*

4.2. Convergence uniforme sur les compact.

DÉFINITION 16. *Soit (X, d), un espace métrique, f_n, $f : X \to E$, un espace vectoriel normé. On dit que f_n converge uniformément vers f sur les compact de X lorsque $\forall\ K \subset X$ compact f_n converge uniformément sur K vers f lorsque $n \to \infty$*

PROPOSITION 11. *Soit f_n, $f : X \to E$ si $f_n \overset{CVU}{\to}$ vers f, alors $f_n \underset{surcompactdeX}{\overset{CVU}{\to}}$ f, alors $f_n \overset{CS}{\to} f$.*

PROPOSITION 12. *Soit X une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit f_n, $f : X \to E$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue en $a \in X$ et si f_n converge uniformément sur les compacts de X alors f est continue en a.*

La preuve de cette proposition est laissée en exercice, il s'agit en fait de trouver un compact comprenant a et d'utiliser les propriétés précédentes dessus.

5. Suites de fonctions, intégrations et dérivations

5.1. Passage à la limite dans une intégrale de Riemann.

THÉORÈME 1. *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables. Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Supposons que $f_n \overset{CVU}{\to} f$, alors :*
- *La suite $\int_X f_n(t)\,dt$ converge*
- *La fonction f est Riemann-intégrable*
- *$\underset{n\to\infty}{lim} \int_X f_n(t)\,dt = \int_X f(t)\,dt$*

DÉMONSTRATION. Puisque $f_n \underset{X}{\overset{CVU}{\to}}$ f, on a $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, $\underset{x\in X}{sup}\,|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est Riemann-intégrable, on a que $f \in B(X;\mathbb{R})$. Or, $f_n \overset{CVU}{\to}$ f dans X, donc $f_n \overset{CVU}{\to} f \in$ B(X ; $\mathbb{R}$), donc $f \in B(X;\mathbb{R})$. Ainsi, f est borné. Soit $\epsilon > 0$ et N $\in \mathbb{N}$ correspondant (par CVU) tq $\forall n > N$ $||f_n - f||_\infty \leq \frac{\epsilon}{4|X|}$. La fonction f_N est R-int sur X $\Rightarrow \exists\Phi$, $\Psi \in \varepsilon(X;\mathbb{R})$ tq : $\Phi \leq f_N \leq \Psi$ et $\int_X \Phi - \Psi < \frac{\epsilon}{2}$
$\widetilde{\Phi} := \Phi - \frac{\epsilon}{4|X|} \leq f_n - \frac{\epsilon}{4|X|} \leq f(x) \leq f_n + \frac{\epsilon}{4|X|} \leq \Psi + \frac{\epsilon}{4|X|} =: \widetilde{\Psi}$
$\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi} \in \epsilon(X;\mathbb{R})$. De plus :

$$\int_X \widetilde{\Psi} - \widetilde{\Phi} = \int_X (\Psi + \frac{\epsilon}{4|X|}) - (\Phi - \frac{\epsilon}{4|X|}) = (\int_X \Psi - \Phi) + (\int_X \frac{2\epsilon}{4|X|}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

4. Il faut comprendre : de tout recouvrement de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini de K.

Donc f est Riemann intégrable.
Pour finir : $\forall n \in \mathbb{N}$: $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \leq ||f_n - f||_{\infty, X}$. Puisque $f_n \overset{CVU}{\to}$ f, on a $||f_n - f||_\infty \to 0 \Rightarrow |\int_X f_n(t)\,dt - \int_X f(t)\,dt| \to 0$
On peut donc voir que :
— la suite $(\int_X f_n(t)\,dt)$ converge
— $\int_X lim = lim \int_X$

□

5.2. Passage à la limite et dérivation.

THÉORÈME 2. *Soit* $\Omega \in \mathbb{R}^d$ *un ouvert. Soit* $f_n \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ *tq*
— $f_n \underset{\Omega}{\overset{CS}{\to}} f$
— $\forall k = \{1, ..., d\} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \underset{compacts\ de\ \Omega}{\overset{cvu\ sur}{\to}} g_k$

Alors :
(1) $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ *et* $\forall x \in \mathbb{R} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \underset{n \to \infty}{lim} \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(x)$
(2) $f_n \underset{surcompactdeX}{\overset{CVU}{\to}} f$

DÉMONSTRATION. Soit x $= (x_1, ..., x_d) \in \Omega$. Puisque Ω est ouvert, $\exists \delta > 0$ tq B(x; δ[$\subset \Omega$

$\Rightarrow$ B(x; $\frac{\delta}{2}$] est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$ et ainsi, B(x; $\frac{\delta}{2}$] est un compact de Ω

Pour $i \in \{1, ..., d\}$, h $\in [-\frac{\delta}{2}; \frac{\delta}{2}]$, n $\in \mathbb{N}$:

$$f_n(x + he_i) = f_n(x) + \int_0^h \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x + te_i)\,dt$$

Par convergence simple : $f(x+he_i) = f(x) + \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+te_i)\,dt$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en x, ce qui se traduit par : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$. Puisque toutes les dérivées sont C^0, f est C^1.

Soit K $\in \Omega$ un compact. $\forall a \in K$, $\exists x > 0$, $B(a, r_a[\in \Omega$ car K$\subset \Omega$ et Ω est ouvert.

Ainsi, par convergence simple de f_n vers f et la propriété de Borël-Lebesgue :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\exists$ un nombre fini de p de (a_i) tels que : $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Soit $\epsilon > 0$ et N$\in \mathbb{N}$ correspondant, soit x$\in K$, $\exists i \in \{1, ..., p\}$ tel que x$\in$B$(a_k, r_k[$

Puisque f et f_n sont toute deux de classe C^1 sur Ω, elles le sont aussi sur B$(a_k, r_k[$ et on a :

$$f(x) = f(a_k) + \int_0^1 (x - a_k)\nabla f(a_k + s(x - a_k))\,ds$$

$$f - n(x) = f_n(a_k) + \int_0^1 (x - a_k)\nabla f_n(a_k + s(x - a_k))\,ds$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a_k) - f(a_k)| + \int_0^1 (x-a)\nabla f(a_k + s(x-a_k)) - \nabla f_n(a_k + s(x-a_k))|ds$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Car pour k assez grand, on peut borner le premier terme par convergence uniforme, de même pour le deuxième. □

COROLLAIRE 2. *Soient :*

(1) f_n*,* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *avec* f_n *CVS vers f*

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $f_n \in C^p(X, Y)$ $(p \in \mathbb{N}_0)$

(3) $\forall k \in \{0, ..., p - s\}$*, les dérivées partielles d'ordre k de* f_k *convergent simplement sur X*

(4) les dérivées partielles d'ordre p de f_n *CVU sur les compact de* Ω

Alors :

(1) $f \in C^p(\Omega, Y)$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha : |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d \leq p$*,* $\forall x \in \Omega : \partial^\alpha f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \partial^\alpha f_n(x)$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha$ *tq* $|\alpha| \leq p$*, la série* $\partial^\alpha f_n$ *CVU sur les compact de X vers* $\partial^\alpha f$

6. Séries de fonctions

6.1. Retranscriptions des résultats sur les suites :

DÉFINITION 17. *Soit X un ensemble, E un e.v.n.,* $(u_n)_n$ *une suite de fonction de X dans Y. On appelle série de terme général* (u_n) *la suite de fonctions définie par :* $S_{n\in N}(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x) \, \forall x \in X$*. La série* (S_n) *de terme général* u_n *CVU sur X lorsque* $(S_n)_n$ *CVU sur X vers S.*

THÉORÈME 3. *Soit* (X, d)*, un espace métrique, soit* $a \in X$ *tq* $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n *est continue en a et si* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *CVU vers S alors S est continue en a (continuité locale).*

THÉORÈME 4. *Soit (X, d) un espace métrique, soit* $u_n \in C^0(X, Y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, si* $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *CVU vers S sur X alors* $S \in C^0(X, Y)$ *(continuité globale).*

THÉORÈME 5. *Soit X un pavé de* $\mathbb{R}^d$*, Y=*$\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$*,* $\mathbb{R}^d$ *ou* $\mathbb{C}^d$*,* $u_n : X \to Y$ *une suite de fonctions Riemann-intégrables sur X. Si* S_n*, la série de terme général* u_n*, CVU sur X vers S, Alors :*

— *S est Riemann-intégrable sur sur X*

— $\int_X S_n(t)\,dt$ *converge*

— $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X S_n(t)\,dt = \int_X S(t)\,dt$

THÉORÈME 6. *Soit* $X \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert (ou segment pour d=1), Y=*$\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$*,* $\mathbb{R}^d$ *ou* $\mathbb{C}^d$

$u_n : X \to Y$ *le terme général d'une série* $(S_n)_n$ *tq :*

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \in C^p(X, Y)$ $(p \in \mathbb{N}_0)$

(2) $\forall k \in \{0, ..., p - s\}$*, les dérivées partielles d'ordre k de* S_k *convergent simplement sur X*

(3) les dérivées partielles d'ordre p de S_n *CVU sur X*

Alors :

(1) $S \in C^p(X, Y)$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha : |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d \leq p, \forall x \in X : \partial^\alpha S(x) = \underset{x \to \infty}{lim} \partial^\alpha S_n(x)$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha$, *la série* $\partial^\alpha S_n$ *CVU sur les compact de* X *vers* $\partial^\alpha S$

Ces théorèmes découlent immédiatement des théorèmes équivalents pour les suites de fonctions sans autre subtilités.

6.2. Convergence normale. Soit X un ensemble et Y un e.v.n

DÉFINITION 18. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* $X \to Y$*. On dit que la série de terme général* (u_n) *converge normalement sur* X *lorsque* $\sum_{n \in \mathbb{N}} ||u_n||_{\infty,X} < +\infty$*.*

Remarquons qu'il s'agit de la convergence absolue dans (B(X,Y), $||.||_\infty$). Comme les sommes partielles sont toutes bornées et de terme général positif, si la série converge normalement, alors elle converge simplement.

THÉORÈME 7 (Critère de Weierstrass). *La série de terme général* u_n *vérifie le critère de Weierstrass si :*

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n \geq 0 : ||u_n(x)||_{\infty, X} \leq M_n$

(2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} M_n < \infty$

Une série converge normalement sur X si et seulement si la série vérifie le critère de Weierstrass

THÉORÈME 8. *Avec les notations précédentes, si* $(Y, ||.||)$ *est un espace de Banach et si* $\sum_{k=0}^{n} u_k$ *converge normalement sur* X*, alors* $\sum_{k=0}^{n} u_k$ *converge uniformément sur* X*.*

DÉMONSTRATION. Puisque Y est de Banach $(B(X; Y), ||.||_\infty)$ l'est aussi. Puisque $\sum_{k=0}^{n} u_n$ converge normalement sur X, $\sum_{k=0}^{n} ||u_k||_{\infty,X} < \infty$. Donc, la suite $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} ||u_k||_{\infty,X}$ est converge dans $\mathbb{R}^+$. Donc, $(\sigma_n)_n$ est de Cauchy de $\mathbb{R}^+$. Donc, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq N$, $||\sigma_n, \sigma_m||_{\mathbb{R}^+} \leq \epsilon$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit N correspondant. Pour $x \in X$:

$$\begin{aligned}
||S_n(x) - S_m(x)||_Y &= || \sum_{k=min(n,m)+1}^{max(n,m)} u_k(x)||_Y \\
&\leq \sum_{k=min(n,m)+1}^{max(n,m)} ||u_k(x)|| \\
&\leq \sum_{k=min(n,m)+1}^{max(n,m)} ||u_k(x)||_{\infty,X} \\
&\leq ||\sigma_n, \sigma_m||_{\mathbb{R}^+} \leq \epsilon \\
||S_n(x) - S_m(x)||_{\infty,X} &\leq \epsilon
\end{aligned}$$

S_n est de Cauchy de $(B(X, Y), ||.||_\infty)$ et donc converge dans $B(X;, Y)$ et converge alors uniformément vers une fonction f sur X. □

COROLLAIRE 3. *Soit* $f_n : X \to Y$*,* Y *de Banach. On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_k \geq 0$, $\forall x \in X$, $||f_{k+1}(x) - f_k(x)||_Y \leq M_k$ *et* $\sum_k M_k < \infty$*. Alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CVU sur X.*

DÉMONSTRATION. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$. Cette série converge normalement sur X par le critère de Weierstrass. Puisque (Y, $||.||_Y$) est de Banach $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X. On a $S_n(x) = f_{n+1} - f_0(x)\, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X. □

6.3. La transformation d'Abel (pour les série).

CRITÈRE 1. *Soit* $(Y, ||.||_Y)$ *un espace vectoriel normé de Banach, soit* f_n *une suite de* $\mathbb{R}^+$ *décroissante et tendant vers 0, soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs tq* $\exists M > 0$, $\forall n \geq 0$, $|| \sum\limits_{k=0}^{n} g|| \leq M$*. Alors la série* $\sum f_k g_k$ *est convergente.*

DÉMONSTRATION. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k g_k$ et montrons que cette suite est de Cauchy. Posons n, $m \in \mathbb{N}$ avec n $<$ m.

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N} : \sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} g_k$. Ainsi, $g_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$.
Donc $S_m - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(\sigma_k - \sigma_{k-1}) = \sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k\sigma_k - \sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k\sigma_{k-1} = f_m\sigma_m - f_{n+1}\sigma_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (f_k - f_{k+1})\sigma_k$. On en déduit que : $||S_m - S_n|| \leq ||f_m\sigma_m||_Y + ||f_{n+1}\sigma_n|| + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} ||(f_k - f_{k+1})\sigma_k||_Y$
$||S_m - S_n||_Y \leq ||f_m\sigma_m||_Y + ||f_{n+1}\sigma_n|| + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} ||(f_k - f_{k+1})\sigma_k||_Y$
Par hypothèse sur σ_n :

$$||S_m - S_n||_Y \leq M(f_m + f_{n+1}) + M \sum_{k=n+1}^{m-1} (f_k - f_{k+1}) \leq M(f_{n+1} - f_m) + M(f_m + f_{(n+1)}) = M f_{n+1}$$

Puisque $f_n \to 0$ on a $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $2Mf_n < \epsilon$. Ainsi, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n$, $m \geq N$, $||S_m - S_n||_Y < \epsilon$. Donc S_n est de Cauchy dans $(Y, ||.||_Y)$ de Banach donc S_n converge. □

THÉORÈME 9. *Soit X un ensemble et Y un espace vectoriel normé de Banach,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* $X \to \mathbb{R}^+$ *tq* $\forall n \geq 0$, $f_{n+1} \leq f_n$, $f_n \overset{CVU}{\to} 0$ *et soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction de* $X \to Y$ *tq* $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ *:* $|| \sum\limits_{k=0}^{n} g_k(x)||_Y \leq M$*. Alors la série* $\sum f_n g_n$ *CVU sur X*

DÉMONSTRATION. $\forall x \in X$, appliquons le raisonnement du théorème précédent à $f_n(x)$ et $g_n(x)$ pour arrive à : $||S_n(x) - S_m(x)||_Y \leq 2Mf_{n+1}(x)$. Donc, $\forall x \in X$,

$$||S_n(x) - S_m(x)||_Y \leq 2M||f_{n+1}||_{\infty,X}$$

D'où $||S_n(x) - S_m(x)||_{\infty,X} \leq 2M||f_{n+1}||_{\infty,X}$. $\Rightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (B(X ;Y), $||.||_{\infty,X}$) et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X □

7. Séries de puissances

7.1. Théorie du rayon.

On s'intéresse à un espace vectoriel réel complet (Y, $||.||_Y$) et aux séries de fonctions de terme général :

$$u_n : X = \mathbb{C} \to Y : x \to u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ fixé. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} :=$ le terme général d'une série de puissance.

DÉFINITION 19. *Avec les notations précédentes, on appelle rayon de la série de puissances l'élément de* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *définit par :*

$$R = \frac{1}{\underset{n\to\infty}{limsup}(||a_n||_Y^{1/n})}$$

avec les conventions $1/0 = \infty$ *et* $1/\infty = 0$

PROPOSITION 13. *Soit* $u_n = a_n(z - x_0)^n$ *le tg d'une série de puissances, notons* $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ *le rayon. On a les propriétés :*

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $||z - x_0| < R$ *la série de tg* $u_n(z)$ *converge absolument.*
(2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $||z - x_0| < R$ *la série de tg* $u_n(z)$ *diverge grossièrement.*[5]

DÉMONSTRATION.

(1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|x_0 - z| < R$
$\frac{1}{R} < \frac{1}{|x_0-z|} \Rightarrow \exists \widetilde{R}$ tq $\frac{1}{R} < \frac{1}{\widetilde{R}} < \frac{1}{|x_0-z|}$.
$\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{limsup}||a_n||_Y^{1/n} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $||a_n||^{1/n} \leq \frac{1}{\widetilde{R}} \Rightarrow ||a_n|| \leq \frac{1}{\widetilde{R}^n}$
Ainsi, $||a_n(x - x_0)^n||_Y = ||a_n||.|x_0 - z|^n \leq \frac{|x_0-z|}{\widetilde{R}}^n$
Or, la série de terme général $\frac{|x_0-z|}{\widetilde{R}}^n$ est une série géométrique de raison $<$ 1 et est donc convergente

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|x_0 - z| > R$ $\frac{1}{R} > \frac{1}{|x_0-z|} \Rightarrow \exists \widetilde{R}$ tq $\frac{1}{R} > \frac{1}{\widetilde{R}} > \frac{1}{|x_0-z|}$.
Puisque $\frac{1}{R} = \underset{n\to\infty}{limsup}||a_n||_Y^{1/n}$, $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tq : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\widetilde{R}}^{\phi(n)} \leq ||u_{\phi(n)}||_Y$$

On en déduit que

$$\frac{|x_0 - z|^{\phi(n)}}{\widetilde{R}} \leq ||a_{\phi(n)}||.|x_0 - z|^{\phi(n)} = ||a_{\phi(n)}(x - x_0)^{\phi(n)}||_Y$$

5. Le terme général de la série ne tend pas vers 0 (et donc la série diverge)

Or, $\frac{|z-x_0|}{R} > 1$ et $\phi(n) \to \infty$ donc la suite $||a_n(x-x_0)^n||_Y$ n'est pas bornée et u_n diverge grossièrement.

□

THÉORÈME 10. *avec les notations précédentes*

(1) Si $R < \infty$ alors, $\forall \epsilon > 0$ avec $\epsilon < R$, la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n(z-x_0)^n$ converge uniformément sur $B(x_0; R-\epsilon]$

(2) Si $R = \infty$, alors $\forall R_0 > 0$, la série de puissances de terme général $a_n(z-x_0)^n$ converge normalement dans $B(x_0; R_0]$

DÉMONSTRATION. Nous devons montrer les deux cas séparément :

(1) Supposons $R < +\infty$, soit $\epsilon \in]0, R[$ et soit $\bullet \in B(z_0, R-\epsilon]$, alors $\|u_n(\bullet)\|_Y = \|a_n(\bullet - z_0)^n\|_Y = \|a_n\|_Y \|(\bullet - z_0)\|^n \leq \|a_n\|_Y (R-\epsilon)^n$, qui est indépendant de $\bullet$. De plus, $\|a_n\|_Y (R-\epsilon)^n$ est le terme général d'une série convergente car $R - \epsilon < R$ et R est son rayon de convergence et donc, par le critère de Weierstrass, la série de fonction de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$ converge normalement sur $B(z_0, R-\epsilon]$.

(2) Supposons que $R = +\infty$, soit $R_0 > 0$ et soit $\bullet \in B(z_0, R_0]$ alors, $\|u_n(\bullet)\|_Y = \|a_n(\bullet - z_0)^n\|_Y = \|a_n\|_Y \|\bullet - z_0\|^n \leq \|a_n\|_Y (R_0)^n$ qui est indépendant de $\bullet$. De plus, $\|a_n\|_Y (R_0)^n$ est le terme général d'une série convergente car $R_0 < R = +\infty$ et R est son rayon de convergence, donc, par le critère de Weierstrass, nous avons que la fonction de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$ converge normalement sur $B(z_0, R_0]$.

□

PROPOSITION 14. *La série de fonction S de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)$ et de rayon de convergence R, converge normalement sur tout compact de $B(z_0, R[$.*

DÉMONSTRATION. Nous avons trois cas :
— Si $R = 0$ il n'y a rien à démontrer.
— Si $R \in]0, +\infty[$, soit K un compact de $B(z_0, R[$, alors $\exists \epsilon \in]0, R[$ tel que $K \subseteq B(z_0, R-\epsilon]$. Comme une série de fonctions de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)$ converge normalement sur $B(z_0, R-\epsilon]$ la convergence normale sur K suit.
— Si $R = +\infty$ alors nous avons que $B(z_0, R[= \mathbb{C}$. Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact $\exists R_0 > 0$ tel que $K \subseteq B(z_0, R_0]$. Comme une série de fonctions de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)$ converge normalement sur $B(z_0, R_0]$ la convergence normale sur K suit.

□

PROPOSITION 15. *La série de puissance S de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$ et de rayon de convergence R est continue sur $B(z_0, R[$.*

DÉMONSTRATION. Observons que le terme général de la série de puissance $u_n : X = \mathbb{C} \to Y : \bullet \mapsto a_n(\bullet - z_0)^n$ est un polynôme $\forall n \in \mathbb{N}$ et toutes fonction polynomiale est continue. De plus, $\forall K \subseteq B(z_0, R[$ où K est un compact, nous avons que la série de terme général $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)$ est absolument convergente alors $S(\bullet) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\bullet)$ est continue sur $B(z_0, R[$. □

PROPOSITION 16. *Soit* $0 < R < +\infty$ *le rayon de convergence de la série de puissance* $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$. *Si* $\exists x_0 \in \varsigma(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z - z_0\|_Y = R\}$ *telle que la série de fonction de terme général* $u_n(x_0) = a_n(x_0 - z_0)^n$ *est absolument convergente alors la série de fonction* $S(\bullet)$ *de terme général* $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$ *converge normalement sur* $B(z_0, R]$.

DÉMONSTRATION. Prenons $z \in B(z_0, R]$ et observons que $|a_n(z - z_0)^n\|_Y = \|a_n\|\|z - z_0\|^n \leq \|a_n\|_Y R^n = \|a_n\|\|x_0 - z_0\|^n = \|a_n(x_0 - z_0)^n\|$ mais la série de terme général $u_n(z) = a_n(x_0 - z_0)^n$ est absolument convergente ce qui signifie que la série de terme général $\|a_n(z - z_0)^n\|$ converge. Observons que ceci ne dépend pas de $z \in B(z_0, R]$ alors, par le critères de Weierstrass, nous avons que la série de fonctions $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$ converge absolument sur $B(z_0, R]$. □

THÉORÈME 11 (D'Abel, radial sur les série de puissances). *Si* $\exists x_0 \in \varsigma(z_0, R)$ *telle que la série de puissance de terme général* $u_n(x_0) = a_n(x_0 - z_0)^n$ *converge, alors la série de puissance de terme général* $u_n(\bullet) = a_n(\bullet - z_0)^n$ *converge uniformément sur le segment* $[z_0, x_0] := \{tx_0 + (1 - t)z_0 \mid t \in [0, 1]\}$.

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, prenons $x_0 = 0 \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{R}_0^+$. Soit $z \in [0, z_0]$, $u_n(z) = a_n z^n = a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ et $R = z_0$. Alors, définissons $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0$. Il vient $u_n = (s_n - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$. Alors pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$ Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z) &= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{k-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1}) - (s_{k-1} - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^k - \sum_{k=n}^{n+p} (s_{k-1} - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

$$= (s_{n+p} - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+p} - (s_{n-1} - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^n + \sum_{k=n}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^k\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z)\Big| &\leq |(s_{n+p} - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+p}| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |(s_k - s_{n-1})|\left(\frac{z}{z_0}\right)^k\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \\
&= (s_{n+p} - s_{n-1})\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+p}| + \sum_{k=n}^{n+p-1} |(s_k - s_{n-1})|\left(\left(\frac{z}{z_0}\right)^k - \left(\frac{z}{z_0}\right)^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse, la série s_k, de terme général $a_n z_0^n$, converge. Prenons $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ nous avons $|S_{n+p} - S_{n-1}| \leq \epsilon$. Alors, $\forall n > N$, nous avons :

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(z)\Big| \leq \epsilon\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+p} + \epsilon \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{z}{z_0}\right)^k - \left(\frac{z}{z_0}\right)^{k+1} = \epsilon\left(\frac{z}{z_0}\right)^n \leq \epsilon$$

Notons que pour S_n, les sommes partielles de la série de puissance $a_n z^n$, nous avons $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, p \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$, $\forall z \in [0, z_0]$ nous avons $|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \epsilon$ ce qui signifie $\|S_{n+p} - S_n\|_{\infty,[0,z_0]} \leq \epsilon$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série de Cauchy in $(B([0, z_0], Y), \|.\|_\infty)$ qui est un espace de Banach donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(B([0, z_0], Y), \|.\|_\infty)$. Donc la série de fonction S_n converge absolument sur $[0, z_0]$. □

THÉORÈME 12 (Produit de Cauchy). *Si $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ sont des séries telle que le terme général a_n et b_n converge absolument, alors la séries $c_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ converge absolument et nous avons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$.*

THÉORÈME 13. *Si $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ sont telle que la série de terme général a_n et b_n convergent et que la série de terme général $c_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ converge aussi, alors nous avons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$.*

DÉMONSTRATION. Posons que $u_n(z) = a_n z^n$, $v_n(z) = b_n z^n$, $w_n(z) = c_n z^n$. Comme la série de terme général a_n, b_n et c_n nous avons les rayons de convergences respectifs : R_1, R_2, R_3 des séries $u_n(z)$, $v_n(z)$ et $w_n(z)$ sont tous ≥ 1. nous avons aussi que $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ et $C(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ sont trois fonctions continues sur $[0, 1]$ et avec les théorème radial d'Abel, nous avons que ces fonctions convergent normalement sur tout compacts de $B(0, R[$ avec $R > 1$. De plus nous avons que $\forall z \in [0, 1[\subseteq B(0, R[$, les séries de terme général $u_n(z) = a_n z^n$, $v_n(z) = b_n z^n$, $w_n(z) = c_n z^n$ sont absolument convergentes. Delà, il suffit d'observer que $n \in \mathbb{N}$ et $z \in [0, 1[$ nous avons qeu $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k)(b_{n-k}) z^n = z^n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = z^n c_n == c_n z^n$ et par le théorème du produit de Cauchy nous avons que $\forall z \in [0, 1[$, $A(z)B(z) = C(z)$ et par continuité de ces fonctions en z =1 $z = 1$ nous avons que $A(1)B(1) = C(1)$et nous avons que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$ □

7.2. Fonctions réelles analytiques.

DÉFINITION 20. *Soit Y un espace vectoriel normé de Banach et soit une suite $u_n : \mathbb{R} \to Y : x \mapsto u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, où $x_0 \in \mathbb{R}$, alors nous nommons la série formelle dérivée de la série de puissance te terme général u_n, la série de puissance de terme général $u'_n : \mathbb{R} \to Y : x \mapsto u'_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ n a_n (x - x_0)^{n-1} & si\ n \geq 1 \end{cases}$*

PROPOSITION 17. *Soit R le rayon de convergence de terme général u_n et soit R' la dérivée formelle de la série de puissance de terme général u_n, alors $R = R'$.*

DÉMONSTRATION. Par définition, de R' nous avons$\frac{1}{R'} = \limsup\limits_{n\to\infty} \|n a_n\|_Y^{1/n-1} = \limsup\limits_{n\to\infty} n^{1/n-1} \|a_n\|_Y^{1/n-1} = \limsup\limits_{n\to\infty} \|a_n\|_Y^{1/n-1}$ car $n^{1/n-1} = \exp\left(\frac{\log n}{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.Alors nous avons que $\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|_Y^{1/n-1} = \limsup_{n\to\infty} (\|a_n\|_Y^{1/n})^{n/n-1} = \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|_Y^{1/n} = \frac{1}{R}$ et donc $\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} \Leftrightarrow R = R'$. □

PROPOSITION 18. *Soit f la somme de la série de puissance de terme général $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ de rayon de convergence $R > 0$, alors f est C^∞ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

DÉMONSTRATION. Le fait que la fonction f soit C^∞ vient du fait que $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ est une fonction polynomiale $\forall n \in \mathbb{N}$, alors f_n est aussi une fonction polynomiale et que toutes fonction polynomiales sont C^∞. Prouvons que $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Soit $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ et soit $n \in \mathbb{N}$ alors nous avons $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(x - x_0)^{k-n}$. En particulier pour $x = x_0$ nous avons $f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(x_0 - x_0)^{k-n} = a_n \frac{n!}{(n-n)!} = a_n n! \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ comme voulu. □

DÉFINITION 21. *Soit Y un espace vectoriel normé de Banach et soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble ouvert. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est réelle analytique sur U si $\forall x_0 \in U$, $\exists \epsilon > 0$ tel que $V =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\subseteq U$ et on a que f est la somme d'une série de puissance sur V.*

PROPOSITION 19. *Soit Y un espace vectoriel normé de Banach, soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble ouvert $f : U \to \mathbb{R}$ be C^∞ on peut définir la série de Taylor de f dans $x_0 \in U$, $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x-x_0)^k}{k!}$. Et nous avons que f est réelle analytique sur U $\Leftrightarrow \forall x_0 \in U$, $\exists \epsilon(x_0) > 0$ tel que P converge uniformément vers f sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$.*

Chapitre 2

Intégration

1. Intégrale absolument convergente

1.1. Rappel sur l'intégrale de Riemann.

DÉFINITION 22. *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a < b$. *On dit que* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction étagée* $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geq 1$ *tq* $\exists\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *et* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *avec* $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ *et* $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *nous avons* $f|_{[a_{i-1}, a_i]} = \lambda_i$. *Nous notons l'ensemble des fonctions étagée* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\xi([a,b], \mathbb{R})$

DÉFINITION 23. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *borné sur* $[a,b]$ *alors nous définissons :*

— $\overline{\int\limits_{[a,b]}} f(x)dx = \underset{f \leq \psi \in \xi([a,b],\mathbb{R})}{inf} \Big(\int_a^b \psi(x)dx \Big)$.
— $\underline{\int\limits_{[a,b]}} f(x)dx = \underset{f \geq \varphi \in \xi([a,b],\mathbb{R})}{sup} \Big(\int_a^b \varphi(x)dx \Big)$.

PROPOSITION 20. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée sur* $[a,b]$. f *est Riemann intégrable sur* $[a,b] \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists \varphi, \psi \in \xi([a,b], \mathbb{R})$ *tel que* $\forall x \in [a,b]$ *nous avons* $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ *tel que* $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx < \epsilon$.

PROPOSITION 21. *Soit* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann intégrables sur* $[a,b]$ *alors :*

(1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *la fonction* $\lambda f + \mu g$ *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$ *et* $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.
(2) La fonction $min(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto min(f(x), g(x))$ *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$ *et* $\int_a^b (min(f,g))(t)dt \leq min(\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt)$.
(3) La fonction $max(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto max(f(x), g(x))$ *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$ *et* $\int_a^b (max(f,g))(t)dt \geq max(\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt)$.
(4) La fonction $|f| : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$ *est Riemann intégrable sur* $[a,b]$ *et* $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)dt|$.

DÉMONSTRATION. La preuve est laissée en exercice [1] □

1.2. Fonctions absolument intégrables.

1. non, cela n'a rien à voir avec la longueur et la non nécessité de la preuve...

Définition 24. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ tel que $I \neq \varnothing$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ on dit que f est absolument intégrable sur I lorsque :* $\forall [a,b] \subset I$, *f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et que* $\underset{[a,b]\subset I}{sup} \int_a^b |f(t)dt| < +\infty$.

Définition 25. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval, on nomme suite exhaustive croissante de segment de I, toutes suites $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \subset I$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ et que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}[a_n, b_n] = I$.*

Lemma 1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide alors $\exists$ au moins une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, qui une suite exhaustive croissante de segment de I.*

Théorème 14. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable de I alors, la suite $\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt$ converge $\forall ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ suite exhaustive croissante de segment de I et sa limite ne dépend pas du choix de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt$ et notons $L = \sup\limits_{[a,b]\subseteq I} \int_a^b |f(t)|dt > +\infty$ car f est absolument intégrable sur I. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons que $\beta_n \leq L$. Prenons une suite exhaustive croissante de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, alors nous avons que la suite β_n est aussi croissante et nous avons que β_n est convergent dans $\mathbb{R}^+$ car elle est croissante et bornée. Par ce fait, nous avons que β_n est une suite de Cauchy. Observons que $\forall n, p \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$|\alpha_{n+p} - \alpha_n| = \Big| \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \Big|$$

$$= \Big| \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)dt + \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \Big|$$

$$= \Big| \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)dt + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)dt \Big| \leq \Big| \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)dt \Big| + \Big| \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)dt \Big|$$

$$\leq \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f(t)|dt + \int_{b_n}^{b_{n+p}} |f(t)|dt$$

$$= \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f(t)|dt + \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt + \int_{b_n}^{b_{n+p}} |f(t)|dt - \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt$$

$$= \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} |f(t)|dt + \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt = \beta_{n+p} - \beta_n = |\beta_{n+p} - \beta_n|$$

Comme $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy nous avons que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy in $(\mathbb{R}, |.|)$. Mais $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace vectoriel de Banach et donc nous avons que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, prenons $|a, b| \subseteq I$ alors nous avons que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $a_n \leq a$ et $b_n \geq b$ ce qui signifie que $[a, b] \subset [a_n, b_n]$ alors $\forall n > N$ nous avons que $\int_a^b |f(t)|dt \leq \beta_n \leq L$. Notons $l = \lim\limits_{n\to\infty} \in \mathbb{R}^+$ et nous avons que $\int_a^b |f(t)|dt \leq l$ $\forall [a, b] \subseteq I$ ce qui signifie que $L = \sup\limits_{[a,b]\subseteq I} \int_a^b |f(t)|dt \leq l$ et donc nous avons que $L \leq l$ et $l \leq L$ car $\beta_n \leq L$ ce qui signifie que $L = l$. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ et $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites exhaustives croissantes de segment de l'intervalle I.

Posons $\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt$, $\beta_n = \int_{a_n}^{b_n}|f(t)|dt$, $\tilde{\alpha}_n = \int_{\tilde{a}_n}^{\tilde{b}_n} f(t)dt$, $\tilde{\beta}_n = \int_{\tilde{a}_n}^{\tilde{b}_n}|f(t)|dt$. Alors nous avons que :

$$|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n| = \Big| \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt - \int_{\tilde{a}_n}^{\tilde{b}_n} f(t)dt \Big|$$

$$= \Big| \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(a_n,\tilde{a}_n)} f(t)dt + \int_{\max(a_n,\tilde{a}_n)}^{\min(b_n,\tilde{b}_n)} f(t)dt + \int_{\min(b_n,\tilde{b}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} f(t)dt - \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} f(t)dt \Big|$$

$$= \Big| \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(a_n,\tilde{a}_n)} f(t)dt + \int_{\min(b_n,\tilde{b}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} f(t)dt \Big| \leq \Big| \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(a_n,\tilde{a}_n)} f(t)dt \Big| + \Big| \int_{\min(b_n,\tilde{b}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} f(t)dt \Big|$$

$$\leq |\beta_n - \tilde{\beta}_n| = \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(a_n,\tilde{a}_n)} |f(t)|dt + \int_{\min(b_n,\tilde{b}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} |f(t)|dt$$

$$= \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(a_n,\tilde{a}_n)} |f(t)|dt + \int_{\max(a_n,\tilde{a}_n)}^{\min(b_n,\tilde{b}_n)} |f(t)|dt + \int_{\min(b_n,\tilde{b}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} |f(t)|dt - \int_{\max(a_n,\tilde{a}_n)}^{\min(b_n,\tilde{b}_n)} |f(t)|dt$$

$$= \int_{\min(a_n,\tilde{a}_n)}^{\max(b_n,\tilde{b}_n)} |f(t)|dt - \int_{\max(a_n,\tilde{a}_n)}^{\min(b_n,\tilde{b}_n)} |f(t)|dt = \int_{\bar{a}_n}^{\bar{b}_n} |f(t)|dt - \int_{\bar{a}'_n}^{\bar{b}'_n} |f(t)|dt$$

Ainsi, $l = L$ et $\int_{\bar{a}_n}^{\bar{b}_n}|f(t)|dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ et $\int_{\bar{a}'_n}^{\bar{b}'_n}|f(t)|dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ ce qui signifie que $|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n| \leq |\beta_n - \tilde{\beta}_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L - L = 0$. Nous obtenons que α_n ne dépend pas du choix de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$. □

PROPOSITION 22. *Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ alors nous avons que $f : I \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable sur I $\Leftrightarrow$ elle est Riemann intégrable sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et dans ce cas nous avons que*

$$\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Pour toute suite exhaustive croissante de segments de $[a, b]$, $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$.

DÉMONSTRATION. Prouvons ces deux choses séparément :

- ($\Leftarrow$) Nous avons que $f : I \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$, ce qui signifie que f est Riemann intégrable sur tous segments $J \subset [a, b]$. De plus, $|f|$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$ car f l'est et car $[a, b]$ est un intervalle alors nous avons que $\exists L < +\infty$ tel que $L = \sup\limits_{[\alpha,\beta]\subset[a,b]} \int_\alpha^\beta |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$ et donc nous avons que $|f|$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$.
- ($\Rightarrow$) Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive croissante de segments de $[a, b]$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ nous avons que $[a_n, b_n] = [a, b]$, alors nous avons $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ car f est absolument intégrable sur I par hypothèse. Ce qui nous donne que f est Riemann intégrable sur I.

□

PROPOSITION 23. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide, alors l'ensemble $\mathcal{L}^1(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ est absolument intégrable sur $I\}$ est un espace vectoriel réel, $\alpha : \mathcal{L}^1(I) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_I f(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I)$ et $N : \mathcal{L}^1(I) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_I |f(t)|dt$ est une pseudo-norme (possède juste les 2 première propriétés de la norme) sur $\mathcal{L}^1(I)$.*

1.3. Intégrales convergentes fonction d'une de leurs bornes.

PROPOSITION 24. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide, soit $a \in I$ et soit f : $I \to \mathbb{R}$ alors f est absolument intégrable sur $I \Leftrightarrow$ nous avons que f est absolument intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$ et on $I \cap [a, +\infty[$ dans ce cas nous avons que : $\int_I f(t)dt = \int_{I\cap]-\infty,a]} f(t)dt + \int_{[a,+\infty[} f(t)dt$.*

DÉMONSTRATION. Prouvons les deux implications séparément :

— ($\Rightarrow$) Comme f est absolument intégrable sur I nous avons que $\forall[\alpha, \beta] \subseteq I \cap [a, +\infty[$ donc $[\alpha, \beta] \subseteq I$:
$$\int_\alpha^\beta |f(t)|dt \leq \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} \int_\alpha^\beta |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt < +\infty$$
Ce qui nous donne que$f$ est absolument intégrable sur $I \cap [a, +\infty[$.
De plus, comme f est absolument intégrable sur I nous avons que $\forall[\alpha, \beta] \subseteq I\cap] - \infty, a]$ donc $[\alpha, \beta] \subseteq I$:
$$\int_\alpha^\beta |f(t)|dt \leq \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} \int_\alpha^\beta |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt < +\infty$$
Ce qui nous donne que$f$ est absolument intégrable sur $I\cap] - \infty, a]$.
Soit $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive croissante de segments de l'intervalle $I\cap]-\infty, a]$ et soit $([\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive croissante de segments de $I \cap [a, +\infty[$. Alors, nous avons que la suite $([\alpha_n, \tilde{\beta}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive croissante de segments de I, et nous avons que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\int_{\alpha_n}^{\tilde{\beta}_n} f(t)dt = \int_{\alpha_n}^{a} f(t)dt + \int_a^{\tilde{\beta}_n} f(t)dt$$
En prenant la limite où $n \to \infty$ nous avons :
$$\int_S i(t)dt = \int_{I\cap]-\infty,a]} f(t)dt + \int_{I\cap[a,+\infty[} f(t)dt$$

— ($\Leftarrow$) Soit $[\alpha, \beta] \subseteq I$ tel que $[\alpha, \beta] \subseteq I \cap [a, +\infty[$ or $[\alpha, \beta] \subseteq I\cap] - \infty, a]$ alors nous avons par hypothèse que f est Riemann intégrable sur $[\alpha, \beta]$. D'autre part, nous avons que $a \in [\alpha, \beta]$ et nous avons par hypothèse que f est absolument intégrable sur $[\alpha, a] \subseteq I\cap] - \infty, a]$ et on $[a, \beta] \subseteq I \cap [a, +\infty[$ donc on $[\alpha, \beta]$. Ce la nous donne que f est Riemann intégrable sur tous compacts de$I$.
Posons $M_1 = \sup_{[\alpha,\beta]\subseteq I\cap]-\infty,a]} \int_\alpha^\beta |f(t)|dt$ et $M_2 = \sup_{[\alpha,\beta]\subseteq I\cap[a,+\infty[} \int_\alpha^\beta |f(t)|dt$.
nous avonstrois cas :

— Si $[\alpha, \beta] \subseteq I\cap] - \infty, a]$ nous avons que $\int_\alpha^\beta |f(t)|dt \leq M_1 \leq M_1 + M_2$.
— Si $[\alpha, \beta] \subseteq I \cap [a, +\infty[$ nous avons que $\int_\alpha^\beta |f(t)|dt \leq M_2 \leq M_1 + M_2$.
— Si $a \in [\alpha, \beta]$ alors $\int_\alpha^\beta |f(t)|dt = \int_\alpha^a |f(t)|dt + \int_a^\beta |f(t)|dt \leq M_1 + M_2$.
Ce qui signifie que f est absolument intégrable sur I.

□

PROPOSITION 25. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur I. Alors, les deux fonctions $F_1 : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{I\cap]-\infty,x]} f(t)dt$*

et $F_2 : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{I\cap][x,+\infty]} f(t)dt$ *sont de Lipschitz sur* I*, ce qui signifie aussi que* $F_1, F_2 \in C^0(I,\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in \text{Int } I$, alors $\exists\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I$. Comme la fonction $|f(\bullet)|$ est Riemann intégrable sur le segment $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2] \subset I$, nous avons que $\forall x \in [x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$, $|f(x)| \leq M(x_0,\delta)$ et nous avons que $\forall x, y \in [x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$:

$$|F(x)-F(y)| = \Big|\int_y^x f(t)dt\Big| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(t)|dt \leq M(x_0,\delta)|x-y|$$

Maintenant, prenons $x_0 \in I$ mais $x \notin \text{Int } I$. Alors, comme $I = [a,b]$ est un intervalle nous avons deux cas :

— $x_0 = a$ alors nous avons que la fonction $|f(\bullet)|$ est Riemann intégrable sur le segment $[a, a+\delta[\subset I$ que $\forall x \in [a, a+\delta[$, $|f(x)| \leq M(a,\delta)$ et nous avons que $\forall x, y \in [a, a+\delta[$,

$$|F(x)-F(y)| = \Big|\int_y^x f(t)dt\Big| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(t)|dt \leq M(a,\delta)|x-y|$$

— $x_0 = b$ alors nous avons que la fonction $|f(\bullet)|$ est Riemann intégrable sur le segment $[b-\delta, b[\subset I$ que $\forall x \in [b-\delta, b[$, $|f(x)| \leq M(b,\delta)$ et nous avons que $\forall x, y \in [b-\delta, b[$,

$$|F(x)-F(y)| = \Big|\int_y^x f(t)dt\Big| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(t)|dt \leq M(b,\delta)|x-y|$$

Alors nous avons que F est une fonction de Lipschitz sur I. □

THÉORÈME 15. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle non vide, soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *absolument intégrable sur* I*, soit* $x_0 \in I$ *et soit* f *continue sur* x_0*, alors nous avons que* $F = F_1$ *et* $F = F_2$ *sont dérivables en* x_0 *et* $F'(x_0) = f(x_0)$.

PROPOSITION 26. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle non vide, soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *absolument intégrable sur* I *et de classe* C^k *sur un voisinage de* $x_0 \in I$*, alors nous avons que* $F = F_1$ *et aussi* $F = F_2$ *est de classe* C^{k+1} *sur un voisinage de* x_0.

1.4. Critère d'intégrabilité absolu.

PROPOSITION 27. *(Critère de domination)*
Soit $[a,b[\subset \mathbb{R}$*, soit* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ *Riemman intégrable sur* $[a,b[$ *et supposons que* $\exists M \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\forall x \in [a,b[$ *nous avons que* $|f(x)| \leq Mg(x)$ *alors nous avons que :*

— *Si* g *est absolument intégrable sur* $[a,b[$ *alors* f *est absolument intégrable sur* $[a,b[$.
— *Si* f *n'est pas absolument intégrable sur* $[a,b[$ *alors alors il est de même pour* g.

DÉMONSTRATION. Prouvons le premiers point, le second étant la contraposée exacte. Comme g est absolument intégrable sur $[a,b[$, nous avons que $\sup\limits_{[\alpha,\beta]\subset[a,b[} \int_\alpha^\beta f(t)dt <$

$+\infty$ ce qui signifie que $\forall x \in [a,b[$, $|f(x)| < M|g(x)|$ où $M \in \mathbb{R}$ nous avons que $\forall [\alpha, \beta] \subset [a,b[$:

$$\int_\alpha^\beta |f(t)|dt \leq \int_\alpha^\beta Mg(t)dt = M\int_\alpha^\beta g(t)dt < +\infty$$

Ce qui nous donne que f est absolument intégrable sur $[a,b[$. □

Définition 26. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, alors on dit que f est dominé par g en $x_0 \in I$, noté $f \underset{x_0}{=} O(g)$, si $\exists \delta > 0$ tel que $\exists M > 0$ avec $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$.*

Définition 27. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, alors on dit que f est négligeable par rapport à g sur un voisinage de x_0, noté $f \underset{x_0}{=} \mathcal{O}(g)$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$.*

Définition 28. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, alors on dit que f est est équivalent à g sur un voisinage de $x_0 \in I$, noté $f \underset{b}{\sim} g$ si nous avons que $f - g \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$.*

Proposition 28. *(Critère d'équivalence)*
Soit $[a,b[\subset \mathbb{R}$, soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$, Riemann intégrables sur $[a,b[$ alors si, $f \underset{x \to b^-}{\sim} g$, nous avons que :

- *Si g est absolument intégrable sur $[a,b[$, alors f est aussi absolument intégrable sur $[a,b[$ et que $\int_a^b |f(t)|dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_a^b g(t)dt$.*
- *Si g n'est pas absolument intégrable sur $[a,b[$ alors il en est de même pour f et $\int_a^b |f(t)|dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_a^b g(t)dt$ et elles tendent vers ∞.*

Démonstration. Prouvons les deux points séparément :

- Comme $|f| \underset{x \to b^-}{\sim} g$, $\exists \delta \in]0, b-a[$ tel que $\forall x \in]b - \delta, b[$:

$$|f(x)| - g(x) \leq |f(x) - g(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| \leq 2g(x)$$

Comme g est absolument intégrable sur $[a,b[$, g est absolument intégrable sur $]b-\delta, b[$ ce qui signifie, par le critère de domination, que f est absolument intégrable sur $]b-\delta, b[$. Par le fait que f est Riemann intégrable sur $[a, b-\delta]$, qui est un intervalle, nous avons que f est absolument intégrable sur $[a, b-\delta]$ et donc f est absolument intégrable sur $[a,b[$. A partir de là, fixons $\epsilon \in]0,1[$, alors $\exists \delta_\epsilon \in]0, b-a]$ tel que $\forall x \in]b-\delta_\epsilon, b[$, $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon g(x)$ ce qui signifie que $\forall t \in]b - \delta_\epsilon, b[$:

$$(1-\epsilon)g(t) \leq |f(t)| \leq (1+\epsilon)g(x) \Leftrightarrow (1-\epsilon)\int_x^b g(t)dt \leq \int_x^b |f(t)|dt \leq (1+\epsilon)\int_x^b g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_x^b |f(t)|dt - \int_x^b g(t)dt \right| \leq \epsilon \int_x^b g(t)dt \Leftrightarrow \int_x^b |f(t)|dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)dt$$

- Le fait que g n'est pas absolument intégrable sur $[a,b[$ suit de la contraposée exacte du premier point. Fixons $\epsilon \in]0,1[$. Alors nous avons que $\exists \delta_1 \in]0, b-a]$ tel que $\forall x \in]b-\delta_1, b[$, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} g(x)$ ce qui signifie que $\forall x, t \in]b-\delta_1, b[$ nous avons que :

$$(1-\frac{\epsilon}{2})g(t) \leq |f(t)| \leq (1+\frac{\epsilon}{2})g(x) \Leftrightarrow (1-\frac{\epsilon}{2})\int_{b-\delta_1}^x g(t)dt \leq \int_{b-\delta_1}^x |f(t)|dt \leq (1+\frac{\epsilon}{2})\int_{b-\delta_1}^x g(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \Big| \int_{b-\delta_1}^{x} |f(t)|dt - \int_{b-\delta_1}^{x} g(t)dt \Big| \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{b-\delta_1}^{x} g(t)dt \Leftrightarrow \int_{b-\delta_1}^{x} |f(t)|dt \underset{x\to b^-}{\sim} \int_{b-\delta_1}^{x} g(t)dt$$

De plus, par le fait que g est non riemann intégrable sur $[a,b[$ et que $\forall x \in [a,b[$, $g(x) \geq 0$, nous avons que $\int_a^x g(t)dt \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$. Et donc nous avons que $\exists \delta_2 \in]0,\delta_1[$ tel que $\forall x \in [b-\delta_2, b[$:

$$\frac{2\int_a^{b-\delta_1}(|f(t)|+g(t))dt}{\epsilon} \leq \int_a^x g(t)dt$$

Ce qui nous donne que $\forall x \in [b-\delta_2, b[$:

$$\Big|\int_a^x |f(t)|dt - \int_a^x g(t)dt\Big| \leq \Big|\int_a^{b-\delta_1} |f(t)|dt + \int_a^{b-\delta_1} g(t)dt\Big| + \Big|\int_{b-\delta_1}^x |f(t)|dt - \int_{b-\delta_1}^x g(t)\Big|$$

$$\leq \Big|\int_a^{b-\delta_1} (|f(t)|+g(t))dt\Big| + \frac{\epsilon}{2}\int_{b-\delta_1}^x g(t) \leq \frac{\epsilon}{2}\int_a^x g(t)dt + \frac{\epsilon}{2}\int_a^x g(t)dt = \epsilon\int_a^x g(t)dt$$

Cela signifie que :

$$\int_a^x |f(t)|dt \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)dt$$

□

1.5. Fonction de références de Riemann.

PROPOSITION 29. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-\alpha}$ alors, si :*
— *$R = [1,+\infty[$, f est absolument intégrable sur $[1,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$.*
— *$R =]0,1]$, f est absolument intégrable sur $]0,1] \Leftrightarrow \alpha < 1$.*

DÉMONSTRATION. Prouvons les deux points séparément :
— Nous avons que la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et donc elle est Riemann intégrable sur tout le segment $[1,x] \subset [1,+\infty[$, alors nous avons aussi que f est positive et que pour $\alpha \neq 1$, $\forall x > 1$:

$$\int_1^x \Big|\frac{dx}{x^\alpha}\Big| = \int_1^x \frac{dx}{x^\alpha} = \Big[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Cela signifie que la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-\alpha}$ est absolument intégrable $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
— La fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-\alpha}$ est continue sur $]0,1]$ et donc est Riemann intégrable sur tous segments $[a,b] \subseteq]0,1]$ alors nous avons comme f est positive que pour $\alpha \neq 1$, $\forall x > 1$:

$$\int_a^b \Big|\frac{dx}{x^\alpha}\Big| = \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \Big[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_a^b = \begin{cases} \frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \geq \frac{(\alpha-1)^{-1}}{a^{\alpha-1}} - M \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-\alpha}$ est absolument intégrable $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

□

1.6. Changement de base.

THÉORÈME 16. *(Changement de base pour l'intégration)*
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles, soit $\varphi : I \to J$ be une bijection de classe C^1, soit $f : J \to \mathbb{R}$ est Riemmann intégrable sur J, alors la fonction f est absolument intégrable sur $J \Leftrightarrow$ la fonction $(fo\varphi) \times \varphi'(\bullet)$ est absolument intégrable sur I et dans ce cas nous avons que $\int_I (fo\varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_J f(t)dt$.

DÉMONSTRATION. Observons que $\varphi : I \to J$ est une bijection de classe C^1, φ est continue et donc est monotone. Nous avons donc 2 cas à traiter :

— Si φ est strictement croissante sur $I = [a, b]$:
(⇒) Alors nous avons que $\forall([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ suites exhaustives croissantes de segments, $I = [a, b]$ la suite $([\varphi(a_n), \varphi(b_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive croissante de segments de $J = [\varphi(a_n), \varphi(b_n)]$. De plus, par le changement de base pour l'intégration vu l'année dernière, nous avons que $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$\int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = \int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi)(x)|\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} |f(t)|dt$$

Comme f est absolument intégrable sur J nous avons que $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K \subset J$ segments nous avons que $\int_K |f(t)|dt \leq M$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$\int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} |f(t)|dt \leq M$$

Donc, nous savons que la fonction $(fo\varphi) \times \varphi'(\bullet)$ est absolument intégrable sur I.
(⇐) Réciproquement, nous avons que si la fonction $(fo\varphi) \times \varphi'(\bullet)$ est absolument intégrable sur I, alors $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K \subset I$ où K est a segment, nous avons que :

$$\int_K |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = \int_K |(fo\varphi)(x)|\varphi'(x)dx \leq M$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$\int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} |f(t)|dt = \int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = \int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi)(x)|\varphi'(x)dx \leq M$$

Donc, nous avons que la fonction f est absolument intégrable sur tous segments $[a_n, b_n]$ mais comme nous savons que la suite, $([\varphi(a_n), \varphi(b_n)])_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ est une suite exhaustive croissante de segments nous avons que $[a_n, b_n] \subset I$ en est aussi une et en prenant sa limite, nous avons que $[a_n, b_n] \subset I$ converge vers $I = [a, b]$.

— Si φ est strictement décroissante sur $I = [a, b]$:
(⇒) Alors nous avons que $\forall([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ suite exhaustive croissante de segments de $I = [a, b]$ la suite $([\varphi(b_n), \varphi(a_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive croissante de segments de $J = [\varphi(b_n), \varphi(a_n)]$. De plus, par le changement de base pour l'intégration vu l'année dernière, nous avons que $\forall n \in \mathbb{N}$ nous

avons que :

$$\int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = -\int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi)(x)|\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(b_n)}^{\varphi(a_n)} |f(t)|dt$$

Comme f est absolument intégrable sur J nous avons que $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K \subset J$ segments nous avons que $\int_K |f(t)|dt \leq M$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$\int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = \int_{\varphi(b_n)}^{\varphi(a_n)} |f(t)|dt \leq M$$

Donc, nous avons que la fonction $(fo\varphi) \times \varphi'(\bullet)$ est absolument intégrable sur I.
($\Leftarrow$) Réciproquement, nous avons que si la fonction $(fo\varphi) \times \varphi'(\bullet)$ est absolument intégrable sur I, alors $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K \subset I$ où K est un segment, nous avons que :

$$\int_K |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx = -\int_K |(fo\varphi)(x)|\varphi'(x)dx \leq M$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$\int_{\varphi(b_n)}^{\varphi(a_n)} |f(t)|dt = \int_{a_n}^{b_n} |(fo\varphi) \times \varphi'(x)|dx \leq M$$

Donc, nous avons que la fonction f est absolument intégrable sur tous segments $[a_n, b_n]$ mais comme nous savons que la suite, $([\varphi(b_n), \varphi(a_n)])_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ est une suite exhaustive croissante de segments nous avons que $[a_n, b_n] \subset I$ en est aussi une et en prenant sa limite, nous avons que $[a_n, b_n] \subset I$ converge vers $I = [a, b]$.

□

2. Intégrales convergentes

2.1. Définitions.

DÉFINITION 29. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable sur tous segments de I alors on dit que l'intégrale de f converge sur I si pour toutes suite exhaustive strictement croissante de I, $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend pas de la suite choisie I, $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$.*

PROPOSITION 30. *Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur I, alors l'intégrale de f converge sur I.*

PROPOSITION 31. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable sur tous segments de I, alors l'intégrale de f converge sur $I \Leftrightarrow$ pour toute suite exhaustive strictement croissante de I, $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ nous avons que la suite $(\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy sur $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. La preuve constitue une partie du travail personnel □

2.2. Théorème de la moyenne.

THÉORÈME 17. *(Théorème de la moyenne pour l'intégrale)*
Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un segments, soit $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions Riemann intégrable sur $[a,b]$, soit $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ et g est décroissante, alors nous avons que $\exists c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt$.

DÉMONSTRATION. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en posant $\forall i \in \{0,1,\ldots,N\}$ que $x_i = a + \frac{(b-a)}{N}i$. Posons $I_N = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \int_{xj}^{x_{j+1}} f(x)g(x_j)dx$. Observons que

$$\Big|I_N - \int_a^b f(x)g(x)dx\Big| = \Big|\sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} f(x)g(x_j)dx - \sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} f(x)g(x)dx\Big|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} |(f(x)g(x_j)) - (f(x)g(x))|dx = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} |f(x)||g(x) - g(x_j)|dx$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} |f(x)||g(x_j) - g(x_{j+1})|dx$$

La dernière inégalité vient du fait que g est décroissante on $[a,b]$. Introduisons la fonction $K : [a,b] \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \int_a^x |f(t)|dt$ Comme la fonction f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ nous avons que la fonction K est de Lipschitz sur $[a,b]$, en particulier, nous avons que la fonction K est uniformément continue sur $[a,b]$. K est une fonction de Lipschitz sur $[a,b]$ car f est continue sur $[a,b]$ et donc, en particulier, elle est bornée. donc nous avons que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$ et alors $\forall x,y \in [a,b]$ nous avons que $|F(x) - F(y)| = \Big|\int_x^y f(t)dt\Big| \leq \Big|\int_x^y Mdt\Big| = M|x-y|$. Posons $\omega(N) = \sup\limits_{t\in\left[a,b-\frac{(b-a)}{N}\right]} (K(t - \frac{(b-a)}{N}) - K(t))$ et donc nous avons, par continuité uniforme de K sur $[a,b]$, que $\omega(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors nous avons que

$$\Big|I_N - \int_a^b f(x)g(x)dx\Big| \leq \sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} |f(x)||g(x_j) - g(x_{j+1})|dx$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}(K(x_{j+1}) - K(x_j))|g(x_j) - g(x_{j+1})|dx$$

$$\leq \omega(N)\sum_{j=0}^{N-1}|g(x_j) - g(x_{j+1})| = \leq \omega(N)\sum_{j=0}^{N-1}(g(x_j) - g(x_{j+1}))| = \omega(N)(g(a) - g(b))$$

Nous en déduisons que I_N converge vers $\int_a^b f(t)dt$. Introduisons $F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et observons que :

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{xj}^{x_{j+1}} f(x)g(x_j)dx = \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)(F(x_{j+1}) - F(x_j))$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_{j+1}) - \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_j) = \sum_{j=1}^{N} g(x_{j-1})F(x_j) - \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)F(x_j)$$

$$= g(x_{N-1})F(x_N) - g(x_0)F(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1}(g(x_{j-1}) - g(x_j))F(x_j)$$

Comme F est C^0 on $[a,b]$ nous avons que f est aussi Riemann intégrable sur $[a,b]$, elle est aussi bornée et atteint ses bornes, m et M. Donc, $\forall N \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$m\big(g(x_{N-1}) + \sum_{j=0}^{N-1}(g(x_{j-1}) - g(x_j))\big) \leq I_N \leq M\big(g(x_{N-1}) + \sum_{j=0}^{N-1}(g(x_{j-1}) - g(x_j))\big)$$

Ce qui signifie que $mg(x_0) \leq I_N \leq Mg(x_0)$, et, en prenant la limite, que $mg(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mg(a)$. Pour conclure :

— Si $g(a) = 0$ alors $g(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$ et chaque $c \in [a,b]$ convient.

— Sinon, nous avons que $g(a) > 0$ et nous avons que $m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M$ avec $m = \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$, par la continuité de F sur $[a,b]$ nous avons que $\exists c \in [a,b]$ tel que $F(c) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t)g(t)dt$.

□

2.3. Critère de convergence d'intégrales.

THÉORÈME 18. *(Théorème d'Abel pour les intégrales)*
Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$ *et soit* $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann intégrable sur tous segments de* $[a,b]$ *alors si :*

— $\exists M > 0$ *tel que* $\forall x \in]a,b[$, *nous avons que* $|\int_a^x f(t)dt| \leq M$.

— $g(x) \geq 0$ $\forall x \in]a,b[$, g *décroissante on* $]a,b[$ *avec* $g(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} 0$.

Alors nous avons que l'intégrale de la fonction $(fg)(\bullet)$ *converge sur* $[a,b[$.

DÉMONSTRATION. Soit $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive croissante de segments de $[a,b[$ alors nous avons que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $a_n = a$. Posons $\alpha_n = \int_a^{b_n} f(t)g(t)dt$, alors $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$\alpha_{n+p} - \alpha_n = \int_a^{b_{n+p}} f(t)g(t)dt - \int_a^{b_n} f(t)g(t)dt = \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)dt$$

Par le théorème de la moyenne pour les intégrales, nous avons que $\exists c_n \in [a,b]$ tel que :

$$\alpha_{n+p} - \alpha_n = g(b_n)\int_{b_n}^{c_n} f(t)dt$$

Ce qui nous donne que, comme $|F(x)| < M$ par hypothèse :

$$|\alpha_{n+p} - \alpha_n| = g(b_n)\Big|\int_{b_n}^{c_{n+p}} f(t)dt\Big| = g(b_n)\Big|\int_a^{c_{n+p}} f(t)dt - \int_a^{b_n} f(t)dt\Big|$$

$$= g(b_n)|F(c_{n+p}) - F(b_n)| \leq g(b_n)\big(|F(c_{n+p})| + |F(b_n)|\big) \leq 2Mg(b_n)$$

Soit $\epsilon > 0$ alors comme $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b^-$ et que $g(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} 0$ nous avons que $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ avec $N_\epsilon > N$ tel que $\forall n > N_\epsilon$, $g(b_n) \leq \epsilon/2M$. Et finalement, $\forall n > N_\epsilon$, $|\alpha_{n+p} - \alpha_n| \leq \epsilon$ ce qui signifie que la série $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc par le critère de Cauchy, nous avons que l'intégrale de la fonction $fg(\bullet)$ est convergente sur $[a,b[$. □

Chapitre 3

Intégrales à paramètres

1. Résultats d'existence, continuité et dérivabilité

DÉFINITION 30. *On dit que l'espace métrique* (X, d) *est localement compact lorsque* $\forall x \in X$ $\forall O \subset X$ *ouvert tel que* $x \in O$ *nous avons que* $\exists K \subset O$ *compact avec* $x \in K$.

PROPOSITION 32. *Soit* (X, d) *un espace métrique localement compact, soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a < b$, *soit* $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *avec* f *continue sur* $X \times [a, b]$ *alors nous avons que* $F : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$ *est bien définie et continue sur* X.

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in X$, la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x_0, t)$ est continue sur $[a, b]$, $\forall x_0 \in X$. Elle est donc aussi Riemann intégrable sur $[a, b]$, ce qui signifie que $F : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$ est bien définie. Soit $x_0 \in X$, $K \subset X$ un voisinage compact de x_0 alors la fonction $f : K \times [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $K \times [a, b]$. Comme $K \times [a, b]$ est compact, car K et $[a, b]$ sont compacts, nous avons que $f : K \times [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $K \times [a, b]$ ce qui signifie que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in K$ avec $d(x_1, x_2) < \delta$, $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ avec $|t_1, t_2| < \delta$ nous avons $|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| < \epsilon/(a - b) = \bar{\epsilon}$. Fixons $\epsilon > 0$ et $x \in K$ tel que $d(x_0, x) < \delta$ nous avons que :

$$|F(x) - F(x_0)| = \Big| \int_a^b f(x, t)dt - \int_a^b f(x_0, t)dt \Big|$$

$$\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|dt \leq \bar{\epsilon}(b - a) = \epsilon$$

Ce qui nous donne que $\forall x_0 \in X$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ un voisinage de x_0, $K \cap B(x_0, \delta[$, dans lequel $|F(x) - F(x_0)| \leq \epsilon$ et donc F est continue sur X. $\square$

PROPOSITION 33. *Soit* X *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *localement compact, soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a < b$, *soit* $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^0 *sur* $X \times [a, b]$. *Supposons que* f *possède des dérivées par rapport à* x_i, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ *en tous points* $(x, t) \in X \times [a, b]$ *avec* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $X \times [a, b]$, *alors la fonction* F *définie par :*

$$F : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$$

est C^1 *sur* X *et nous avons* $\forall x \in X$, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ *que*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt$$

DÉMONSTRATION. La fonction F est définie et continue sur X par l'hypothèse que $f \in C^0(X \times [a,b], \mathbb{R})$ et la proposition 32. Fixons $x_0 \in X$ et prenons $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta[\subset X$. Un tel δ existe car X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Observons que $\forall t \in [a,b]$ la fonction $f_* : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $B(x_0,\delta[$. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ alors nous avons que $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \delta$ et $\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$:

$$f(x_0 + he_i, t) - f(x_0, t) = \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + se_i, t)ds = h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + se_i, t)ds$$

Par la proposition 32, le membre de droite est une fonction C^0 sur $[a,b]$ et nous obtenons que :

$$F(x_0 + he_i) - F(x_0) = h\int_a^b \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + se_i, t)ds\Big)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x_0 + he_i) - F(x_0)}{h} = \int_a^b \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + se_i, t)ds\Big)dt$$

Ainsi, le membre de droite de l'égalité est une fonction continue de $h \in]-\delta, \delta[$ en appliquant la proposition 32 avec l'hypothèse : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est C^0 sur $X \times [a,b]$, ce qui signifie que :

$$\frac{F(x_0 + he_i) - F(x_0)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_a^b \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, t)ds\Big)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, t)dt$$

Donc F est dérivable dans toutes directions $\forall x_0 \in X$. De plus, par la proposition 32, $\frac{\partial F}{\partial x_i} \in C^0(X, \mathbb{R})$ ce qui signifie que $F \in C^1(X, \mathbb{R})$. $\square$

2. Intégrales définies sur un segment variable

PROPOSITION 34. *Soient a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $\alpha < \beta$ et soit la fonction $f : [\alpha, \beta] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\alpha, \beta] \times [a,b]$ alors la fonction :*

$$F : [\alpha, \beta] \times [a,b] \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto \int_a^t f(x,s)ds$$

est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a,b]$.

DÉMONSTRATION. Soit $(x,t) \in [\alpha, \beta] \times [a,b]$ et soit $(\Delta x, \Delta t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x + \Delta x, t + \Delta t) \in [\alpha, \beta] \times [a,b]$. Alors nous avons que :

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x, t+\Delta t) - F(x,t) &= \int_a^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, s)ds - \int_a^t f(x,s)ds \\ &= \int_a^t f(x+\Delta x, s)ds + \int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, s)ds - \int_a^t f(x,s)ds \\ &= \int_a^t (f(x+\Delta x, s) - f(x,s))ds + \int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, s)ds \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a,b]$, qui est un compact, f est uniformément continue sur $[\alpha, \beta] \times [a,b]$. Donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tel que $|\Delta x| < \delta_\epsilon$, $\forall s \in [a,t] \subseteq [a,b]$:

$$|f(x+\Delta x, s) - f(x,s)| \leq \epsilon/2(b-a)$$

Comme f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ qui est un compact, $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall(x,t)\in[\alpha,\beta]\times[a,b]$ nous avons que $f(x,t)\leq M$. Cela signifie que si nous prenons $\Delta t\leq\epsilon/2M$:

$$\Big|\int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x,s)ds\Big| \leq \int_t^{t+\Delta t}|f(x+\Delta x,s)|ds \leq \int_t^{t+\Delta t} Mds = \Delta tM \leq \epsilon/2$$

Donc, $\forall\epsilon>0$, en prenant $|\Delta x|\leq\delta_\epsilon$, $|\Delta t|\leq\epsilon/M$:

$$\begin{aligned}|F(x+\Delta x,t+\Delta t)-F(x,t)| &\leq \Big|\int_a^t(f(x+\Delta x,s)-f(x,s))ds+\int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x,s)ds\Big|\\ &\leq \Big|\int_a^t(f(x+\Delta x,s)-f(x,s))ds\Big|+\Big|\int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x,s)ds\Big|\\ &\leq \int_a^t|f(x+\Delta x,s)-f(x,s)|ds+\epsilon/2 \leq \int_a^t(\epsilon/2(b-a))ds+\epsilon/2\\ &= (t-a)(\epsilon/2(b-a))+\epsilon/2\leq(b-a)(\epsilon/2(b-a))+\epsilon/2=\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon\end{aligned}$$

Cela signifie que la fonction F est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$. □

PROPOSITION 35. *Soit $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $a<b$, $\alpha<\beta$, soient les fonctions $f:[\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ et soient les deux fonctions $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ continues sur $[\alpha,\beta]$, alors la fonction F définie par :*

$$F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}:x\mapsto F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds$$

est continue sur le segment $[\alpha,\beta]$.

DÉMONSTRATION. $\forall(x,T_1,T_2)\in[\alpha,\beta]\times[a,b]^2$, posons :

$$F_1(x,T_1,T_2)=\int_{T_1}^{T_2} f(x,s)ds=\underbrace{\int_a^{T_2} f(x,s)ds}_{ⓐ}-\underbrace{\int_a^{T_1} f(x,s)ds}_{ⓒ}$$

Or,ⓐ est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ avec $T_1\in[a,b]$ et ⓒ est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ avec $T_2\in[a,b]$. Cela signifie que la fonction F_1 est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]^2$. Par composition, $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ nous avons que la fonction $F(x)=F_1(x,\varphi(x),\psi(x))$ est C^0 sur $[\alpha,\beta]$. □

PROPOSITION 36. *Soit $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $a<b$ et $\alpha<\beta$. Soit $f:[\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ alors, la fonction F définie par :*

$$F:[\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}:(x,t)\mapsto\int_a^t f(x,s)ds$$

est C^1 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$.

DÉMONSTRATION. Comme la fonction f est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ et que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ nous avons par proposition 33 que $\forall(x_0,t_0)\in[\alpha,\beta]\times[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0)=\int_a^{t_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,s)ds$$

De plus, par la proposition 34, appliquée à la fonction $\frac{\partial F}{\partial x} : [\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$ est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$.

Par le théorème fondamental de l'analyse, nous avons que $\forall(x_0,t_0)\in[\alpha,\beta]\times[a,b]$:

$$F(x_0,t_0)=\int_a^{t_0} f(x_0,s)ds \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)=f(x_0,t_0)$$

Comme $f : [\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial t} : [\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ est aussi C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$. Cela signifie que F est C^1 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ car toutes ses dérivées partielles existent et sont C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$. □

PROPOSITION 37. *Soit a, b, α, $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $a<b$, $\alpha<\beta$. Soit la fonction $f : [\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$, continue sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est C^0 sur $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ et que les deux fonctions, $\varphi,\psi : [\alpha,\beta]\to[a,b]$ sont C^1 sur $[\alpha,\beta]$, alors la fonction F définie par :*

$$F : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R} : x\mapsto F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds$$

est C^1 sur le segment $[\alpha,\beta]$ et $\forall x\in[\alpha,\beta]$:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds\right)(x)=\psi'(x)f(x,\psi(x))-\varphi'(x)f(x,\varphi(x))+\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,s)ds$$

DÉMONSTRATION. Soit $x\in[\alpha,\beta]$, nous avons que :

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds=\int_a^{\psi(x)} f(x,s)ds-\int_a^{\varphi(x)} f(x,s)ds=F_*(x,\psi(x))-F_*(x,\varphi(x))$$

Par la proposition 36, $F_*\in C^1([\alpha,\beta]\times[a,b],\mathbb{R})$. Par compositions des fonctions $\varphi,\psi : [\alpha,\beta]\to[a,b]$, qui sont toutes deux C^1 sur $[\alpha,\beta]$, les deux fonctions :

$$F_1 : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R} : x\mapsto F_1(x)=F_*(x,\varphi(x))$$

$$F_2 : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R} : x\mapsto F_2(x)=F_*(x,\psi(x))$$

sont C^1 sur $[\alpha,\beta]$. Observons que $F(x)=F_2(x)-F_1(x)$ et concluons grâce au fait que F est C^1 sur $[\alpha,\beta]$.

De plus :

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,s)ds=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}F_2(x)-\frac{d}{dx}F_1(x)=\frac{dF_*}{dx}(x,\psi(x))-\frac{dF_*}{dx}(x,\varphi(x))$$

$$=\frac{\partial F_*}{\partial x}(x,\psi(x))+\psi'(x)\frac{\partial F_*}{\partial t}(x,\psi(x))-\frac{\partial F_*}{\partial x}(x,\varphi(x))-\varphi'(x)\frac{\partial F_*}{\partial t}(x,\varphi(x))$$

$$=\int_a^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,s)ds+\psi'(x)f(x,\psi(x))-\int_a^{\varphi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,s)ds-\varphi'(x)f(x,\varphi(x))$$

$$=\psi'(x)f(x,\varphi(x))-\varphi'(x)f(x,\varphi(x))+\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,s)ds$$

□

3. Fonctions définies par des intégrales convergentes

DÉFINITION 31. *Soit $X \neq \varnothing$ un ensemble tel que (X, d) est un espace métrique, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fini et soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ alors on dit que l'intégrale de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ est convergente sur I, $\forall x \in X \Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall \epsilon > 0$, $\exists K_{\epsilon,x}$ un segment de I tel que $\forall K$ segments de I avec $K_{\epsilon,x} \subset K \subset I$ nous avons que :*

$$\Big| \int_K f(x,s)ds - \int_I f(x,s)ds \Big| < \epsilon$$

DÉFINITION 32. *Soit $X \neq \varnothing$ un ensemble tel que (X, d) est un espace métrique, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fini et soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ alors on dit que l'intégrale de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ est convergente sur I uniformément sur X $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists K_\epsilon$ un segment de I tel que $\forall K$ segments de I avec $K_\epsilon \subset K \subset I$ et $\forall x \in X$ nous avons que :*

$$\Big| \int_K f(x,s)ds - \int_I f(x,s)ds \Big| < \epsilon$$

PROPOSITION 38. *Soit (X, d) un espace métrique, soit $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$, soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$, continue sur $X \times I$ et supposons que l'intégrale de la fonction*

$$f_* : X \times I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$$

possède une intégrale convergent sur I uniformément sur X. Alors la fonction :

$$F : X \times \mathbb{R} : x \mapsto \int_S i(x,s)ds$$

est continue sur X.

DÉMONSTRATION. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive croissante de segments de I. Posons $\forall k \in \mathbb{N}$ que :

$$F_k : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{a_k}^{b_k} f(x,s)ds$$

Alors observons que $\forall k \in \mathbb{N}$ nous avons que F_k est continue. De plus, nous avons que :

$$|F(x) - F_k(x)| = \Big| \int_I f(x,s)ds - \int_{a_k}^{b_k} f(x,ds)ds \Big|$$

Comme l'intégrale de la fonction $f_* : X \times I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ est convergente sur I uniformément sur X par hypothèse, nous avons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k > N_\epsilon$:

$$\sup_{x\in X} |F(x) - F_k(x)| = \sup_{x\in X} \Big| \int_I f(x,s)ds - \int_{a_k}^{b_k} f(x,ds)ds \Big| \leq \epsilon$$

Ce qui signifie que la suite de fonctions F_k converge uniformément vers la fonction F et donc comme $\forall k \in \mathbb{N}$ nous avons que F_k est continue sur X, nous avons que la fonction F est aussi continue sur X. $\square$

PROPOSITION 39. *Soit $\varnothing \neq X \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ tel que f est continue sur $X \times I$, soit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est C^1 sur $X \times I$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ et soit l'intégrale des fonctions :*

$$f_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_d, t)$$

$$g_i : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2 x_2, \dots, x_d, t)$$

est convergente sur I uniformément sur X, $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$ alors la fonction :

$$F : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_S i(x, s) ds$$

est C^1 sur X et nous avons que $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $\forall x \in X$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} F(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, s) ds$$

DÉMONSTRATION. bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb □

4. Théorèmes de Fubini

THÉORÈME 19. *(Théorème de Fubini sur des produits d'intervalles fixes) Soit $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $\alpha < \beta$, soit $f \in C^0([\alpha, \beta] \times [a, b], \mathbb{R})$ alors les deux fonctions F et G définies par :*

$$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

$$G : [a, b] \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_\alpha^\beta f(x, t) dx$$

sont toutes deux continue sur leurs domaines respectifs et nous avons que :

$$\int_\alpha^\beta F(x) dx = \int_\alpha^\beta \Big(\int_a^b f(x, t) dt \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_\alpha^\beta f(x, t) dx \Big) dt = \int_a^b G(t) dt$$

DÉMONSTRATION. F et G sont clairement continue par la proposition 35. Alors introduisons :

$$H_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_\alpha^x F(x) dx$$

$$H_2 : [\alpha, \beta] : x \mapsto \int_a^b g(x, t) dt = \int_a^b \Big(\int_\alpha^x f(x, t) dx \Big) dt$$

Alors nous avons que la fonction H_1 est C^1 sur $[\alpha, \beta]$ car F est continue sur $[\alpha, \beta]$ et nous avons que $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $H_1'(x) = F(x)$. La fonction g est C^0 sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ par le théorème 35. De plus, nous avons que $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ et est égal à $f(x, t)$ dans $\forall (x, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b]$ ce qui signifie que $\frac{\partial g}{\partial x}$ est C^0 sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ par hypothèse sur f. Cela nous donne, par la proposition 34 que H_2 est C^1 sur $[\alpha, \beta]$ et que $\forall x \in [\alpha, \beta]$ nous avons que :

$$H_2'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x} g(x, t) = \int_a^b f(x, t) dt = F(x) = H_1'(x)$$

avec que et par connectivité par arc de $[\alpha, \beta]$, $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [\alpha, \beta]$ nous avons que $H_1(x) = H_2 + k$ mais pour $x = \alpha$ nous avons que $H_1(\alpha) = H_2(\alpha) + k \Leftrightarrow 0 = 0 + k$ et donc $k = 0$ et nous avons que $\forall (x, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b]$ □

THÉORÈME 20. *(Théorème de Fubini sur des produits d'intervalle variables) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta$, soit $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$, un intervalle et soit $f \in C^0([\alpha, \beta] \times I, \mathbb{R})$ alors les deux fonctions F et G définies par :*

$$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_S i(x,t)dt$$

$$G : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)dx$$

sont toutes deux continues sur leurs domaines respectifs, l'intégrale de la fonction G est convergente sur I et nous avons que :

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \Big(\int_S i(x,t)dt \Big) dx = \int_I \Big(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \Big) dt = \int_I G(t)dt$$

DÉMONSTRATION. Nous avons que $F \in ([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ par la proposition 39. Nous avons que $G \in C^0(I, \mathbb{R})$ par la proposition 35. De plus, la fonction G est Riemann intégrable sur tous segments de I car G est continue. Soit $\big([a_n, b_n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive croissante de segments de I. Soit $\epsilon > 0$ alors Comme l'intégrale de G converge dans I nous avons que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ nous avons que :

$$\Big| \int_S i(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt \Big| < \epsilon/(\beta - \alpha)$$

Ainsi, pour $n > N$:

$$\begin{aligned} &\Big| \int_\alpha^\beta \Big(\int_S i(x,t)dt \Big) dx - \int_\alpha^\beta \Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt \Big) dx \Big| \\ &= \Big| \int_\alpha^\beta \Big(\int_S i(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt \Big) dx \Big| \\ &\leq \int_\alpha^\beta \Big| \int_S i(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt \Big| dx \\ &< \int_\alpha^\beta \epsilon/(\beta - \alpha) = \epsilon \end{aligned}$$

Et, par le théorème 17, nous avons que $\forall n > N$:

$$\Big| \int_\alpha^\beta F(x)dx - \int_{a_n}^{b_n} \Big(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \Big) dt \Big| < \epsilon$$

Ce qui signifie que la suite $\Big(\int_{a_n}^{b_n} G(t)dt \Big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_\alpha^\beta F(x)dx$ ce qui nous donne que l'intégrale de G converge sur I et que :

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \Big(\int_S i(x,t)dt \Big) dx = \int_I \Big(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \Big) dt = \int_I G(t)dt$$

□

THÉORÈME 21. *(Théorèmes de Fubini) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta$, soit $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$un intervalle, soit $f \in C^0([\alpha, \beta] \times I, \mathbb{R})$ et supposons que :*

$$\underset{[a,b] \subset I}{sup} \int_a^b \Big(\int_\alpha^\beta |f(x,t)|dx \Big) dt < +\infty$$

alors les deux fonctions F et G définies par :

$$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_S i(x,t)dt$$

$$G : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)dx$$

sont toutes deux continues sur leurs domaines respectifs, l'intégrale de la fonction G est absolument convergente sur I et nous avons que :

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \Big(\int_S i(x,t)dt\Big)dx = \int_I \Big(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\Big)dt = \int_I G(t)dt$$

DÉMONSTRATION. La démonstration prend environ 10pages dans notre théorie de l'intégration, c'est pourquoi elles sera démontrée dans le cadre de la théorie de la mesure □

5. Critère de convergence uniforme des intégrales.

PROPOSITION 40. *Soit $\varnothing \neq X$ un ensemble, soit $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X$ la fonction $f_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur tous segments de I et soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ tel que φ est absolument intégrable sur I et tel que $\forall (x,t) \in X \times I$ nous avons que $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$, alors nous avons que l'intégrale de la fonction f_* converge sur I uniformément sur X.*

DÉMONSTRATION. $\forall x \in X$ nous avons que $f_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ est absolument intégrable sur I, et donc son intégrale est convergente sur I, en effet, $\forall [a,b] \subset I$ nous avons que $\forall x \in X$:

$$\int_a^b |f(x,t)|dt \leq \int_a^b \varphi(t)dt \leq \int_I \varphi(t)dt < +\infty$$

Notons $I = |a,b|$ car I peut être ouvert, fermé ,... mais dans tous les cas, nous avons que $a = \inf_{x \in I}$ et $b = \sup_{x \in I}$. Comme φ est Riemann intégrable sur I nous savons que $\forall \epsilon > 0$ nous avons que $\exists K_\epsilon$ segment de I tel que $\forall K \subset I$ avec $K_\epsilon \subset K$ nous avons que :

$$\Big|\int_I \varphi(t)dt - \int_K \varphi(t)dt\Big| < \epsilon$$

Fixons $\epsilon > 0$ alors nous avons que $\forall k = [\alpha, \beta] \subset I$ avec $K_\epsilon \subset K \subset I$:

$$\Big|\int_I f(x,t)dt - \int_K f(x,t)dt\Big| = \Big|\int_a^b f(x,t)dt - \int_\alpha^\beta f(x,t)dt\Big|$$

$$= \Big|\int_a^\alpha f(x,t)dt + \int_\beta^b f(x,t)dt\Big| \leq \Big|\int_a^\alpha f(x,t)dt\Big| + \Big|\int_\beta^b f(x,t)dt\Big| \leq \int_a^\alpha \Big|f(x,t)\Big|dt + \int_\beta^b \Big|f(x,t)\Big|dt$$

$$\leq \int_a^\alpha \varphi(t)dt + \int_\beta^b \varphi(t)dt = \leq \int_I \varphi(t)dt - \int_K \varphi(t)dt < \epsilon$$

nous avons showed que $\forall \epsilon > 0$ $\exists K_\epsilon \subset I$ a segment tel que $\forall K \subset I$ segment avec $K_\epsilon \subset K \subset I$ nous avons que :

$$\sup_{x \in X} \Big|\int_I f(x,t)dt - \int_K f(x,t)dt\Big| \leq \epsilon$$

Ce qui signifie que l'intégrale de la fonction f_* converge sur I uniformément sur X. □

THÉORÈME 22. *(Critère d'Abel pour les intégrales) Soit $\varnothing \neq$ un ensemble, soit $\varnothing \neq I = [a, b[\subset \mathbb{R}$, soit $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction tel que $f = \varphi \times \psi$ avec $\varphi, \psi : X \times I \to \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in X$ nous avons que $\varphi_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \varphi(x,t)$ et $\psi_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \psi(x,t)$ sont toutes deux Riemann intégrable sur tous segments de I, soit suppose que $\exists M > 0$ tel que $\forall [a,b] \subset I$, $\forall x \in \Xi$ nous avons que $\left|\int_a^b \varphi(x,t)dt\right| < M$ et soit suppose que $\forall x \in X$ la fonction $\psi_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \psi(x,t)$ est décroissante avec une intégrale positive et que $\psi_*(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur X. Alors nous avons que l'intégrale de la fonction $f_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément sur X.*

DÉMONSTRATION. Soit $\big([a_n, b_n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive croissante de segments de I. Comme $I = [a, b[$ nous avons que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ nous avons que $a_n = a$ Ce qui nous donne que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt = \int_a^{b_{n+p}} f(x,t)dt - \int_a^{b_n} f(x,t)dt$$

$$= \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x,t)dt = \int_{b_n}^{b_{n+p}} \psi(x,t)\varphi(x,t)dt$$

$$= \psi(x, b_n) \int_{b_n}^{c_{n+p}} \varphi(x,t)dt$$

La dernière inégalité provient du théorème de la moyenne pour les intégrales (theorem 15) avec $c_{n+p} \in [b_n, b_{n+p}]$. Nous en déduisons que $\exists M > 0$ tel que $\forall [a,b] \subset I$, $\forall x \in X$ nous avons que $\left|\int_a^b \varphi(x,t)dt\right| < M$ que :

$$\Big|\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt\Big| = \psi(x,b_n)\Big|\int_{b_n}^{c_{n+p}} \varphi(x,t)dt\Big| \leq 2M\psi(x,b_n)$$

Alors avec le fait que $\forall x \in X$ la fonction $\psi_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \psi(x,t)$ est décroissante avec une intégrale positive et que $\psi_*(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur X nous avons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 > N$ tel que $\forall n > N_1$, $\sup\limits_{x \in X} \psi(x, b_n) < \epsilon/2M$ Ce qui nous donne que :

$$\Big|\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt\Big| \leq 2M\psi(x,b_n) \leq \epsilon$$

et donc la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy $\forall x \in X$ et donc l'intégrale de $f_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ converge sur I Par le critère de Cauchy. Alors, en prenant la limite de $p \to +\infty$ nous avons que $\forall n > N_1$, $\forall x \in X$:

$$\Big|\int_S i(x,t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)dt\Big| \leq \epsilon$$

Nous en déduisons que $f_* : I \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément sur X. □

6. Quelques applications.

6.1. Produit de convolution.

DÉFINITION 33. *Soit (X,d) un espace métrique, soit $f : X \to \mathbb{R}$ alors on appelle support de f dans l'ensemble X :*

$$Supp(f) := Adh\left(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\right)$$

LEMMA 2. *Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :*

(1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(2) Supp $(\varphi) = [-1,1]$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$ *nous avons que* $\varphi(x) \geq 0$

(4) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$

DÉMONSTRATION. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ Cette fonction est clairement dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et nous avons que Supp $(h) = [0,+\infty]$. De plus, nous avons que :

$$h^{(k)}(x)\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} P_k(x)e^{-1/x^2}/x^{3k} \text{ avec } P_k \in \mathbb{R}[x] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Alors en prenant $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto h(1+x)h(1-x)$ nous avons que $\rho \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho(x) \geq 0$ et Supp $(\rho) = [-1,1]$. De là, prenons $\varphi(x) := \frac{\rho(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)dx}$ et nous avons fini.

□

LEMMA 3. $\forall \alpha > 0$ *nous pouvons définir la fonction* $\varphi_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha\varphi(\alpha x)$ *et nous avons que* $\varphi_* \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,*Supp* $(\varphi_*) = [-1/\alpha, 1/\alpha]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *nous avons* $\varphi_*(x) \geq 0$ *et* $\int_{\mathbb{R}} \varphi_*(x)dx = 1$.

PROPOSITION 41. *(Produit de convolution)*
Soit $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que f est Riemann intégrable sur tous segments de $\mathbb{R}$ et g est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$ les fonctions :

$$h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)g(x-t)$$

$$h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x-t)g(t)$$

sont toutes deux absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et nous avons que :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt = (g*f)(x)$$

DÉMONSTRATION. Prouvons que les deux fonctions sont absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:

— Soit $x \in \mathbb{R}$ alors nous avons que la fonction $h_{1_x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)g(x-t)$ est Riemann intégrable sur tous segments de $\mathbb{R}$ car f est Riemann intégrable et g est continue, sur tous segments de $\mathbb{R}$. De plus, la fonction g est à support compact sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tel que supp $g \subset [a,b]$. Nous savons aussi que la fonction f est Riemann intégrable sur le segment correspondant $[x-b, x-a]$ par hypothèse sur f et donc elle est bornée sur $[x-b, x-a]$ ce qui signifie que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists M_x > 0$ tel que $|f(t)| < M_x$.

Comme la fonction g est continue sur tous segments de $\mathbb{R}$, par hypothèse, nous avons que la fonction :

$$\bar{h}_{1_x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto g(x-t)$$

est continue sur $[x-b, x-a]$ et tel que $\bar{h}_{1_x}$ est bornée sur $[x-b, x-a]$ ce qui signifie que $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in [x-b, x-a]$, $\bar{h}_{1_x}(t) < M$. Nous avons donc que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$|h_{1_x}(t)| = |f(t)g(x-t)| = |f(t)\bar{h}_{1_x}(t)| \leq |f(x-t)|MId_{[x-b,x-a]}(t) \leq M_x MId_{[x-b,x-a]}(t)$$

Ainsi, la fonction h_{1_x} est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ car :

$$\int_{\mathbb{R}} |h_{1_x}(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} M_x MId_{[x-b,x-a]}(t) = (b-a)M_x M$$

— Soit $x \in \mathbb{R}$ alors nous avons que la fonction $h_{2_x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x-t)g(t)$ est Riemann intégrable sur tous segments de $\mathbb{R}$ car f est Riemann intégrable et g est continue, sur tous segments de $\mathbb{R}$. De plus, la fonction g est a un support compact sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tel que supp $g \subset [a, b]$, sur ce segment $[a, b]$ nous avons que la fonction :

$$\bar{h}_{2_x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x-t)$$

est Riemann intégrable sur $[a, b]$ par hypothèse sur f et par composition avec avec un changement de variable affin et donc elle est bornée sur $[a, b]$ ce qui signifie que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists M_x > 0$ tel que $|\bar{h}_{2_x}| = |f(x-t)| < M_x$. Comme g est continue sur $[a, b]$ nous avons que g est bornée sur $[a, b]$ ce qui signifie que $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in [a, b]$, $g(t) < M$. All of que gives us que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$|h_{2_x}| = |f(x-t)g(t)| = |\bar{h}_{2_x} g(t)| \leq |f(x-t)|MId_{[a,b]}(t) \leq M_x MId_{[a,b]}(t)$$

Ainsi, la fonction la fonction h_{2_x} est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ car :

$$\int_{\mathbb{R}} |h_{2_x}(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} M_x MId_{[a,b]}(t) = (b-a)M_x M$$

Maintenant, nous avons à prouver que :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x)$$

Avec le changement de variable :

$$\psi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x - t$$

Cette fonction est de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi_x'(t) = -1$ et par le théorème de changement de variables nous avons :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)(go\psi_x)(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} (fo\psi_x)(t)(go\psi_x o\psi_x)(t)\psi_x'(t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (fo\psi_x)(t)(go\psi_x o\psi_x)(t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x)$$

$$\Leftrightarrow (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x)$$

□

6.2. Régularisation par convolution.

PROPOSITION 42. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable sur tous segments de $\mathbb{R}$ et posons $\forall k > 1$ que $f_k = f * \varphi_k$ où la fonction $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto k\varphi(kx)$ avec $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nous avons $\varphi_k(x) \geq 0$, Supp $(\varphi_k) = [-1/k, 1/k]$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t)dt = 1$. Alors nous avons que :*

1. *$f_k \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f_k^{(p)} = f * \varphi_k^{(p)}$*
2. *Si f est $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f_k \xrightarrow[\text{on tous compacts de} \mathbb{R}]{CVU} f$*
3. *Si f est $C^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall s \in \{0, 1, \dots p\}$, $f_k^{(s)} \xrightarrow[\text{on tous compacts de} \mathbb{R}]{CVU} f^{(s)}$*

DÉMONSTRATION. Prouvons les trois points séparément :

(1) Par définition de f_k nous avons que :

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_k(x-t)dt$$

et soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ alors la fonction :

$$h_{1_k}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(t)\varphi(x-t)$$

est de classe $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ et nous avons que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^p}{dx^p}\Big(f(t)\varphi_k(x-t)\Big) = f(t)\varphi_k^{(p)}(x-t)$$

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ nous avons que :

— Si $k = 1$:

$$\frac{d}{dx}\Big(f(t)\varphi_k(x-t)\Big) = \frac{df(t)}{dx}\varphi_k(x-t) + \frac{d\varphi_k}{dx}(x-t)\frac{d(x-t)}{dx}f(t) = \varphi_k'(x-t)f(t)$$

— Supposns que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(f(t)\varphi_k(x-t)\Big) = f(t)\varphi_k^{(n)}(x-t)$$

et pour $n+1$:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(f(t)\varphi_k(x-t)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^n}{dx^n}\Big(f(t)\varphi_k(x-t)\Big)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(f(t)\varphi_k^{(n)}(x-t)\Big)$$

$$= \frac{df(t)}{dx}\varphi_k^{(n)}(x-t) + \frac{d\varphi_k^{(n)}}{dx}(x-t)\frac{d(x-t)}{dx}f(t) = f(t)\varphi_k^{(n+1)}(x-t)$$

Ce qui était voulu.

De plus, les fonctions $H_k^p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)\varphi_k^{(p)}(x-t)$ sont Riemann intégrable sur tous segments de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ nous avons que :

$$-1 \leq k(x-t) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq kx - kt \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{k} \leq x - t \leq \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{k} \leq t - x \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow x - \frac{1}{k} \leq t \leq \frac{1}{k} + x$$

Comme $x \in [a,b]$ nous avons que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_k^{(p)}(x-t)| \leq |\varphi_k^{(p)}(x-t)| Id_{\left[a-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}\right]}(t)$$

Comme $\varphi_k^{(p)} \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nous avons que $\varphi_k^{(p)}$ est bornée sur $\left[a-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}\right]$ donc $\exists M_{k_p} > 0$ avec $|\varphi_k^{(p)}(x-t)| < M_{k_p}$,$\forall x-t \in \left[a-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}\right]$. Ce qui nous donne que $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{d^p}{dx^p}\Big(\varphi_k(x-t)f(t)\Big)\right| = \left|\varphi_k^{(p)}(x-t)f(t)\right| \leq |f(t)|\left|\varphi_k^{(p)}(x-t)\right| Id_{\left[a-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}\right]}(t)$$
$$\leq \|f\|_\infty M_{p_k} Id_{\left[a-\frac{1}{k}, b+\frac{1}{k}\right]}(t)$$

Cette dernière expression étant Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendamment de $x \in [a,b]$ nous obtenons, par la proposition 34, que $f_k \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $f_k^{(p)} = f*\varphi_k^{(p)}$. En appliquant la proposition 34 même si $f(t)\varphi_k^{(p)}(x-t)$ n'est pas continue pour $t \in \mathbb{R}$, car l'hypothèse que la fonction est Riemann intégrable est et est continue $\forall x \in \mathbb{R}$ est suffisante pour montrer les propositions 33 et 34.

(2) Prenons $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $x \in [a,b]$ alors nous avons que :

$$|f_k(x)-f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_k(t)dt - f(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_k(t)dt - f(x)\int_{\mathbb{R}}\varphi_k(t)dt\right|$$
$$= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_k(t) - f(x)\varphi_k(t)dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-t)-f(x))\varphi_k(t)dt\right|$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ nous avons qu'elle est uniformément continue sur $[a-1,b+1]$, ce qui signifie que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tel que $\forall x,y \in [a-1,b+1]$ avec $|x-y| < \delta_\epsilon$ nous avons que $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k} < \delta_\epsilon$ et nous avons que $\forall t \in \text{Supp } \varphi_k = \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$:

$$|(x-t)-x| = |t| \leq \frac{1}{k} \leq \delta_\epsilon$$

Ce qui signifie que $\forall x \in [a,b]$:

$$|f_k(x)-f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-t)-f(x))\varphi_k(t)dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)-f(x)||\varphi_k(t)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} \epsilon\varphi_k(t)dt = \epsilon$$

Comme cela convient $\forall x \in [a,b]$ nous avons que $\forall k > \frac{1}{\delta_\epsilon}$, $\sup_{x\in[a,b]} |f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon$ ce qui signifie que $f_k \xrightarrow[\text{sur tous compacts de}\mathbb{R}]{CVU} f$.

(3) Prenons $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$. Comme $f \in C^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et le fait que $\forall x \in [a,b]$, $\forall s \in \{1,2,\ldots,p\}$, $f_k^{(s)}(x) = \left(f * \varphi_k^{(s)}\right)(x)$ nous avons que $\forall s \in \{1,2,\ldots,p\}$, $\forall x \in [a,b]$:

$$\left|f_k^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)\right| = \left|\left(f*\varphi_k^{(s)}\right)(x) - f^{(s)}(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_k^{(s)}(t)dt - f^{(s)}(x)\right|$$
$$= \left|\Big[f(x-t)\varphi_k^{(s-1)}(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f'(x-t)\varphi_k^{(s-1)}(t)dt - f^{(s)}(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f'(x-t)\varphi_k^{(s-1)}(t)dt - f^{(s)}(x)\right|$$
$$= \left|\Big[f'(x-t)\varphi_k^{(s-2)}(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f^{(2)}(x-t)\varphi_k^{(s-2)}(t)dt - f^{(s)}(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f^{(2)}(x-t)\varphi_k^{(s-2)}(t)dt - f^{(s)}(x)\right|$$
$$= \cdots = \left|\int_{\mathbb{R}} f^{(s)}(x-t)\varphi_k(t)dt - f^{(s)}(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f^{(s)}(x-t)\varphi_k(t)dt - f^{(s)}(x)\int_{\mathbb{R}}\varphi_k(t)dt\right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f^{(s)}(x-t) - f^{(s)}(x) \right) \varphi_k(t) dt \right|$$

Comme $f^{(s)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ nous avons qu'elle est uniformément continue sur $[a-1, b+1]$, ce qui signifie que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tel que $\forall x, y \in [a-1, b+1]$ avec $|x-y| < \delta_\epsilon$ nous avons que $|f^{(s)}(x) - f^{(s)}(y)| < \epsilon$. Alors soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k} < \delta_\epsilon$ et nous avons que $\forall t \in \text{Supp } \varphi_k$:

$$|(x-t) - x| = |t| \leq \frac{1}{k} \leq \delta_\epsilon$$

Ce qui signifie que $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_k^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f^{(s)}(x-t) - f^{(s)}(x) \right) \varphi_k(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| f^{(s)}(x-t) - f^{(s)}(x) \right| |\varphi_k(t)| dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \epsilon \varphi_k(t) dt = \epsilon$$

Comme cela convient $\forall x \in [a, b]$ nous avons que $\forall k > \frac{1}{\delta_\epsilon}$, $\sup_{x \in [a,b]} \left| f_k^{(s)}(x) - f^{(s)}(x) \right| \leq \epsilon$ ce qui signifie que $\forall s \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $f_k^{(s)} \xrightarrow[\text{on tous compacts de} \mathbb{R}]{CVU} f^{(s)}$.

□

THÉORÈME 23. *(Théorème de l'approximation de Weierstrass)* *Soit $[a, b]$ un segments de $\mathbb{R}$, soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists P_\epsilon[x]$ tel que $\|f - P_\epsilon\|_{\infty,[a,b]} \leq \epsilon$.*

DÉMONSTRATION. Etendons la fonction f à la fonction $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - 1 \\ f(a)(x - a + 1) & \text{si } x <\in [a-1, a[\\ f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ f(b)(b + 1 - x) & \text{si } x \in]b, b+1] \\ 0 & \text{si } x > b + 1 \end{cases}$$

Alors en composant cette fonction avec un changement de variables affin $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \alpha x + \beta$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha(a-1) + \beta = -1/2 \\ \alpha(b+1) + \beta = 1/2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{(b-a+2)} \\ \beta = \frac{-a-b}{2(b-a+2)} \end{cases}$$

qui est toujours définis lorsque $b + 1 \neq a - 1$. De plus, ce changement de variable, $\psi(x) = \alpha x + \beta$, laisse invariant la nature des polynômes. En effet, si $P \in \mathbb{R}[x]$ alors $(P o \psi) \in \mathbb{R}[X]$. Maintenant, appelons $\tilde{f}$ la fonction tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) = \tilde{f}(\psi(x)) \Leftrightarrow \tilde{f}(x) = \bar{f}(\psi^{-1}(x))$. Maintenant, si le théorème est vrai pour $\tilde{f}$ sur $[-1/2, 1/2]$ il sera vrai pour f sur $[a, b]$. En effet, pour $\tilde{f}$ sur $[-1/2, 1/2]$, $\exists Q_\epsilon \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\|\tilde{f} - Q_\epsilon\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \epsilon$ et nous fixons $P_\epsilon = (Q_\epsilon o \psi)$ nous aurons :

$$\|\tilde{f} - Q_\epsilon\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \epsilon \Leftrightarrow \|(\bar{f} o \psi^{-1}) - (Q_\epsilon o \psi o \psi^{-1})\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{f} - (Q_\epsilon o \psi)\|_{\infty,[a-1,1b+1]} < \epsilon \Leftrightarrow \|\bar{f} - P_\epsilon\|_{\infty,[a-1,b+1]} < \epsilon$$

Montrons le résultat pour $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec Supp $\tilde{f} \subseteq [-1/2,1/2]$, $\tilde{f}(-1/2)=0$ et $\tilde{f}(1/2)=0$. Pour ce faire, nous définissons $\forall k \geq 1$ la fonction :

$$g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} (1-x^2)^k & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Nous avons que $g_k \in C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, donc nous pouvons poser $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)dx$ et $h_k = \frac{g_k}{\alpha_k}$ tel que$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)dx = 1$. Observons que :

$$\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} g_k(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^k dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^k dx \geq 2\int_0^1 (1-x)^k dx = \frac{2}{k+1}$$

Ce qui signifie que $\forall \delta \in]0,1[$, $h_k \xrightarrow[\mathbb{R}\backslash B(x,\delta)]{CVU} 0$ en effet, $\forall \delta \in]0,1[$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash B(x,\delta]$ nous avons que :

$$|h_k(x)| = \left|\frac{g_k(x)}{\alpha_k}\right| \leq \frac{k+1}{2}(1-\delta^2)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

et la limite est indépendante de $x \in \mathbb{R}\backslash B(x,\delta]$. Maintenant, posons $\forall x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ $f_k = h_k * \tilde{f}$, qui sont bien définies car $h_k \in C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\tilde{f}$ est Riemann intégrable sur tous segments de $\mathbb{R}$. Alors nous avons comme Supp $\tilde{f} \subseteq [-1/2,1/2]$ que :

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)h_k(x-t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(t)h_k(x-t)dt$$

Et, par construction sur $h_k \in \mathbb{R}_{2k}[x]$ sur $[-1/2,1/2]$ nous avons que $\exists a_{0_k}(t), a_{1_k}(t), \ldots, a_{2k_k}(t)$ tel que $\forall x$ avec $|x| < 1/2$, $t \in [-1/2,1/2]$ (car $|x-t| \leq 1$) :

$$h_k(x-t) = \sum_{p=0}^{2k} a_p(t)x^p$$

Ce qui nous donne que $\forall x \in [-1/2,1/2]$:

$$f_k(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(t)h_k(x-t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(t)\sum_{p=0}^{2k} a_p(t)x^p dt = \sum_{p=0}^{2k}\Big(\int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(t)a_p(t)dt\Big)x^p$$

Ce qui signifie que $f_k(x) \in \mathbb{R}[x]$. Montrons que $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{CVU \text{ sur } [-1,1]} \tilde{f}$. Pour ce faire, prouvons que comme $\tilde{f} \in C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nous avons que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, $\exists a,b \in \mathbb{R}$ tel que Supp $\tilde{f} \subseteq [a,b]$ et donc Supp $\tilde{f} \subseteq [a-1,b+1]$ qui est un intervalle. et donc comme f est C^0 sur $[a-1,b+1]$ nous avons que f est uniformément continue sur $[a-1,b+1]$ ce qui signifie que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tel que $\forall x,y \in [a-1,b+1]$ avec $|x-y| < \delta_1$ nous avons $|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| < \epsilon$. De plus, Comme $\forall x \in \mathbb{R}\backslash[a,b]$, $\tilde{f}(x) = 0$ nous avons que deltq $\delta \leq 1$ est suffisant dans la définition de continuité uniforme sur $\mathbb{R}\backslash[a-1,b+1]$. ET donc nous avons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon = \min\{\delta_1, 1\}$ tel que $\forall x,y \in \mathbb{R}$ avec $|x-y| < \delta_\epsilon$ nous avons $|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| < \epsilon$, ce qui signifie que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Alors nous avons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta \in]0,1[$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $|x-y| < \delta$, $|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)| < \epsilon$. Pour cette valeur de δ nous avons que $\forall x \in [-1/2,1/2]$:

$$|f_k(x)-\tilde{f}(x)| = |h_k*\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x-t)h_k(t)dt - \tilde{f}(x)\int_{\mathbb{R}} h_k(t)dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(x-t)-\tilde{f}(x))h_k(t)dt\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-\delta} |\tilde{f}(x-t)-\tilde{f}(x)|h_k(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{f}(x-t)-\tilde{f}(x)|h_k(t)dt + \int_{\delta}^{+\infty} |\tilde{f}(x-t)-\tilde{f}(x)|h_k(t)dt$$

De là, observons que :

— Comme $\tilde{f} \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nous avons que $\tilde{f}$ est bornée sur son support $[a, b]$, ce qui signifie que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0$ tel que $|\tilde{f}(t)| < M$. Et nous avons que :

$$\int_{-\infty}^{-\delta} |\tilde{f}(x-t) - f(t)|h_k(t)dt \leq \int_{-\infty}^{-\delta} (|\tilde{f}(x-t)| + |f(t)|)h_k(t)dt$$

$$\leq 2M \int_{-\infty}^{-\delta} h_k(t)dt = 2M \int_{-1}^{-\delta} h_k(t)dt \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

La convergence vers 0 vient du fait que h_k converge uniformément vers 0 sur $[-1, -\delta]$ indépendamment de $x \in \mathbb{R}$.

— De plus, nous avons que :

$$\int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{f}(x-t) - \tilde{f}(x)|h_k(t)dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon h_k(t)dt \leq \epsilon$$

— Comme $\tilde{f} \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nous avons que $\tilde{f}$ est bornée sur son support $[a, b]$, ce qui signifie que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0$ tel que $|\tilde{f}(t)| < M$. Et nous avons que :

$$\int_{\delta}^{+\infty} |\tilde{f}(x-t) - f(t)|h_k(t)dt \leq \int_{\delta}^{+\infty} (|\tilde{f}(x-t)| + |f(t)|)h_k(t)dt$$

$$\leq 2M \int_{\delta}^{+\infty} h_k(t)dt = 2M \int_{\delta}^{1} h_k(t)dt \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

La convergence vers 0 vient du fait que h_k converge uniformément vers 0 sur $[-1, -\delta]$ indépendamment de $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > N$, $\forall x \in [-1/2, 1/2]$, nous avons que $|f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon + 4M\epsilon = \tilde{\epsilon}$. Ainsi, en posant que $P_{\tilde{\epsilon}} = f_k \in \mathbb{R}[x]$ nous avons que $\|f - P_\epsilon\|_{\infty,[a,b]} \leq \epsilon$ □

7. Critère de compacité dans un espace de dimension non-finie

DÉFINITION 34. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$ une partie de X alors nous appellons adhérence de A dans X :*

$$Adh\ A = \bar{A} := \left\{ x \in X \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} x \right\}$$

LEMMA 4. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$ une partie de X, alors nous avons que $A \subseteq \bar{A}$ et que $\bar{A}$ est le plus petit ensemble fermé qui contient A.*

LEMMA 5. *Soit (X, d) un espace métrique, soit $A \subset X$ une partie de X et soit $\{F_i\}_{i \in I}$ l'ensemble de touts les sous ensemble fermé de X qui contiennent A alors nous avons que :*

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$$

DÉFINITION 35. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$ une partie de X, alors on dit que A est dense dans X lorsque $\bar{A} = X$.*

DÉFINITION 36. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$ une partie de X, alors on dit que A est dénombrable s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.*

DÉFINITION 37. *Soit (X,d) un espace métrique, alors on dit que X est séparable si $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans X.*

PROPOSITION 43. *Soit (X,d) un espace métrique et soit $K\subset X$ une partie compacte de K, alors nous avons que (K,d) est séparable.*

DÉMONSTRATION. Soit $n\in\mathbb{N}$. Observons que $K\subset \underset{x\in K}{\cup} B\big(x,\frac{1}{n}\big[$. Comme K est compact nous avons que $\exists I_n=\{1,2,\ldots,N_n\}$ tel que $x_{1_n},\ldots,x_{N_n}\in K$ et $K\subset \underset{p\in I_n}{\cup} B\big(x_{k_n},\frac{1}{n}\big[$. Si nous considérons la suite $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$ définie par : $x_{1_1},x_{2_1},\ldots,x_{N_1},x_{1_2},x_{2_2},\ldots,x_{N_2},x_{1_3},x_{2_3},\ldots$ nous avons trouvé une suite dense dans K car $\forall x\in K$, $\forall\epsilon>0$, nous avons que $\exists N_\epsilon\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n>N_\epsilon$, $n>\frac{1}{\epsilon}$ et donc $x\in K\subset \underset{p\in I_{N_\epsilon}}{\cup} B\big(x_{k_n},\frac{1}{n}\big[\subset \underset{p\in I_{N_\epsilon}}{\cup} B\big(x_{k_n},\epsilon\big[$ ce qui signifie que $\forall x\in K$, $\exists n_x\in\mathbb{N}$ tel que $d(o_{n_x},x)<\epsilon$ et donc K est séparable. □

PROPOSITION 44. *Soit (X,d) un espace métrique et soit $A\subset X$ une partie de X, alors nous avons que A est séparable $\Leftrightarrow \exists O\subseteq A$ une partie dense dans A tel que O est fini ou dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Prouvons les deux implications séparément :

- ($\Rightarrow$) Comme A est séparable il existe une suite dense de A. En prenant l'image de cette suite dense qui est dénombrable ou fini dans A nous concluons.
- ($\Leftarrow$) Soit C une partie dense de A alors nous avons deux cas :
  - Si C est fini nous avons que $C=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ et nous prenons la suite $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ définie par : $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$. Nous avons que la suite $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de A car elle contient tous les éléement de C qui est une partie dense de A.
  - Si C est dénombrable nous avons que $C=\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} x_n$ et nous prenons la suite $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ définie par : $x_0,x_0,x_1,x_0,x_1,x_2,x_0,x_1,x_2,x_3,x_0,\ldots$. Nous avons que la suite $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de A car $\forall x\in A$ nous avons que :
$$\#\{n\in\mathbb{N}\mid d(x,o_n)<\epsilon\}=+\infty$$

□

PROPOSITION 45. $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ *est séparable.*

DÉMONSTRATION. Trouvons une partie dénombrable dense de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et par la proposition 44 nous aurons que $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ est séparable. Soit $\epsilon>0$, alors par le théorème des approximations de Weierstrass, $\exists P_\epsilon\in\mathbb{N}[x]$ tel que $\|f-P_\epsilon\|_\infty\le\epsilon/2$. Comme P_ϵ est un polynomial nous avons que $P_\epsilon(x)=a_{d_\epsilon}x^d+\cdots+a_{1_\epsilon}+a_{0_\epsilon}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ nous avons que $\forall\epsilon>0$, $\exists(b_{d_\epsilon},\ldots,b_{0_\epsilon})\in\mathbb{Q}^{d+1}$ tel que $|b_{i_\epsilon}-a_{i_\epsilon}|<\frac{\epsilon}{2d+1}$. Alors nous définissons $Q_\epsilon(x)=b_{d_\epsilon}x^d+\cdots+b_{1_\epsilon}x+b_{0_\epsilon}$ et nous avons que $\forall x\in[0,1]$:

$$|P_\epsilon(x)-Q_\epsilon(x)|\le\sum_{k=0}^{d}|a_{k_\epsilon}-b_{k_\epsilon}|x^k\le\sum_{k=0}^{d}|a_{k_\epsilon}-b_{k_\epsilon}|\le\sum_{k=0}^{d}\frac{\epsilon}{2d+1}<\epsilon/2\Leftrightarrow\|P_\epsilon-Q_\epsilon\|_\infty\le\epsilon/2$$

Alors nous avons que $\|f-Q_\epsilon\|_\infty\le\|f-P_\epsilon\|_\infty+\|P_\epsilon-Q_\epsilon\|_\infty\le\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon$ et Comme $\mathbb{Q}[x]$ du degré d est dénombrable $\forall d\in\mathbb{N}$ car il existe une bijection $\mathbb{Q}[x]$ et $\mathbb{Q}^{d+1}$ et une autre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ nous avons que $\mathbb{Q}[x]$ est une partie dense dénombrable de $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$. □

PROPOSITION 46. *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ tel que $A \neq \varnothing$, alors nous avons que A est séparable.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 44, il suffit de montrer que A possède une partie dense non-vide , finie ou dénombrable. Soit $(x_q)_{q\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une énumération $\mathbb{Q}^d$. Nous savons que $A \subset \mathbb{R}^d$ et que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ et $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $A \subset \mathbb{R}^d = \underset{q\in\mathbb{N}}{\cup} B\big(x_q, \frac{1}{n}\big[$. Maintenant, posons $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$C_n = \Big\{ q \in \mathbb{N} \;\Big|\; B\Big(x_q, \frac{1}{n}\Big[\cap A \neq \varnothing \Big\}$$

Il est facile de voir que C_n est fini or dénombrable. De là, $\forall q \in C_n$ nous choisissons $y_{n,q} \in B\big(x_q, \frac{1}{n}\big[\cap A$, et alors l'ensemble

$$X_n = \{y_{n,q} \mid n \in \mathbb{N},\, q \in C_n\} \subset A$$

est non-vide, fini où dénombrable. Nous posons finalement :

$$X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} X_n \subset A$$

et nous avons que X est une partie dense non-vide , fini or dénombrable de A. En effet, soit $a \in A$ et soit $\epsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > 2/\epsilon$. Comme $A \subset \mathbb{R}^d = \underset{q\in\mathbb{N}}{\cup} B\big(x_q, \frac{1}{n}\big[$ nous avons que $\exists q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{q_0}, a) < 1/n_0$ avec $q_0 \in C_{n_0}$. Et nous avons que $\exists y_{n_0,q_0} \in X$ tel que $d(y_{n_0,q_0}, x_{q_0}) < 1/n_0$. Ce qui nous donne que :

$$d(y_{n_0,q_0}, a) \leq d(y_{n_0,q_0}, x_{q_0}) + d(x_{q_0}, a) < 1/n_0 + 1/n_0 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Nous avons donc montré que $\forall a \in A$, $\forall \epsilon > 0$ nous avons que $\exists y \in X$ tel que $d(a,y) < \epsilon$ ce qui signifie que X est dense dans A. $\square$

DÉFINITION 38. *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ tel que $X \neq \varnothing$, nous appellons l'ensemble des fonction continue bornée de X dans $\mathbb{R}$ l'ensemble :*

$$C_b^0(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \in C^0 \text{ et } f \in B(X, \mathbb{R})\}$$

LEMMA 6. *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ tel que $X \neq \varnothing$, et fixons $\|.\|_{\infty,X} := \underset{x\in X}{sup}|f(x)|$, alors nous avons que $(C_b^0(X), \|.\|_{\infty,X})$ est un espace vectoriel normé.*

LEMMA 7. *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ tel que $X \neq \varnothing$ alors nous avons que $(C_b^0(X), \|.\|_{\infty,X})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(B(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\infty,X})$.*

DÉMONSTRATION. Prenons, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (C_b^0(X))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions tel que f_n converge (dans le sens $\|.\|_{\infty,X}$) vers $f \in B(X,\mathbb{R})$, alors nous avons que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\epsilon$ ce qui donne que $\|f_n - f\|_{\infty,X} < \epsilon$. Ce qui signifie que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f$. Mais Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C_b^0(X)$ nous avons que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X et alors we aussi get que f est continue sur X. Ainsi $f \in B(X,\mathbb{R}) \cap C^0(X,\mathbb{R})$, ce qui signifie exactement que $f \in C_b^0(X)$ et C_b^0 est fermé dans $(B(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\infty,X})$. $\square$

LEMMA 8. *Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ tel que $X \neq \varnothing$, et fixons $\|.\|_{\infty,X} := \underset{x\in X}{sup}|f(x)|$, alors nous avons que $(C_b^0(X), \|.\|_{\infty,X})$ estun espace vectoriel normé de Banach.*

DÉMONSTRATION. Par définition de $C_b^0(X)$ nous avons que $(C_b^0(X), \|.\|_{\infty,X}) \subseteq (B(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\infty,X})$ qui est un espace vectoriel normé de Banach. Et par le lemme 10 nous avons que $(C_b^0(X), \|.\|_{\infty,X})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(B(X,\mathbb{R})\|.\|_{\infty,X})$. Observons que tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé de Banach doit être un espace vectoriel normé de Banach. □

LEMMA 9. *Soit X be un compact tel que $X \neq \varnothing$, alors nous avons que $C_b^0(X) = C^0(X,\mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. Par construction de $C_b^0(X)$ nous avons que $C_b^0(X) \subseteq C^0(X,\mathbb{R})$. Réciproquement, si $f \in C^0(X,\mathbb{R})$ où X est compact nous avons que $f(X)$ est aussi un compact par la continuité de f dans X, ce qui nous donne que $C^0(X,\mathbb{R}) \subseteq C_b^0(X)$ et donc nous avons que $C_b^0(X) = C^0(X,\mathbb{R})$. □

PROPOSITION 47. *Soit $X = [a,b]$ alors nous avons que :*

(1) l'ensemble des fonctions polynomiales de X vers $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(X,\mathbb{R}) \subset C_b^0(X) = C^0([a,b],\mathbb{R})$

(2) l'ensemble $\mathcal{P}(X,\mathbb{R})$ est dense dans $C_b^0(X) = C^0(X,\mathbb{R})$ dans le sens de $\|.\|_{\infty,X}$.

(3) l'ensemble $C_b^0(X)$ est séparable.

DÉFINITION 39. *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ tel que $A \neq \varnothing$, soit $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}$ et soit $F \subset \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ alors F est équicontinue si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tel que $\forall f \in F$, $\forall x, y \in A$ $\|x-y\| < \delta_\epsilon$ nous avons que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

THÉORÈME 24. *(Théorème d'Arzela-Ascoli)*
Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie compacte non-vide de $\mathbb{R}^d$, soit $B \subset C_b^0(A)$une partie bornée équicontinue de A alors B possède une adhérence compacte car $\forall (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante que converge vers $f \in \bar{B}$ sous $\|.\|_{\infty,A}$.

DÉMONSTRATION. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$. Construisons $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ que converge vers $f \in B$ sous $\|.\|_{\infty,A}$. Comme A est compact, nous avons que A est séparable ce qui signifie que $\exists C \subset A$ tel que C est dense, fini ou dénombrable, alors nous avons deux cas :

— Si C est fini nous avons que $A = C$ alors nous avons que $C = \{x_1, \ldots, x_N\}$ avec $N \in \mathbb{N}$. Et nous avons que la suite $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc par Bolzano-Weierstrass il existe :

$$\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } f(x_1) \in \mathbb{R}$$

Où φ_1 est strictement croissante, tel que $f_{\varphi_1(n)}(x_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_1)$. Mais la suite $f_{\varphi_1(n)}(x_1)$ est aussi bornée et donc par Bolzano-Weierstrass il existe :

$$\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } f(x_2) \in \mathbb{R}$$

Où φ_2 est strictement croissante, tel que $f_{\varphi_1 o \varphi_2(n)}(x_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_2)$. Si on itère N fois, nous obtenons qu'il existe :

$$\varphi_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } f(x_N) \in \mathbb{R}$$

où φ_N est strictement croissante, tel que $f_{\varphi_1 o \varphi_2 o \ldots o \varphi_N(n)}(x_N) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_N)$. Ainsi, $f_{\varphi_1 o \varphi_2 o \ldots o \varphi_N(n)}$ converge simplement vers f et comme $\#A < +\infty$ on déduit que $f_{\varphi_1 o \varphi_2 o \ldots o \varphi_N(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} f$ et Comme $f_n \in B^{\mathbb{N}}$ nous avons que $f \in \bar{B}$.

— Si C est dénombrable $C = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\{x_n\}$. nous avons que $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Alors nous avons que par Bolzano-Weierstrass il existe :

$$\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } f(x_1) \in \mathbb{R}$$

où φ_1 est strictement croissante, tel que $f_{\varphi_1(n)}(x_1) = f_n^1(x_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_1)$. Mais la suite $f_{\varphi_1(n)}(x_1)$ est aussi bornée et alors par Bolzano-Weierstrass il existe :

$$\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } f(x_2) \in \mathbb{R}$$

où φ_2 est strictement croissante, tel que $f_{\varphi_1 o \varphi_2(n)}(x_2) = f_n^2(x_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_2)$. Si we iterate N times we obtain qu'il existe :

$$\varphi_N : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } f(x_N)\mathbb{R}$$

où φ_N est strictement croissante, tel que $f_{\varphi_1 o \varphi_2 o \ldots \varphi_N(n)}(x_N) = f_n^N(x_N) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_N)$. Notons $g_n = f_n^n$ (Cette procédure est nommée "'extraction de la diagonale de Cantor"'). Et donc $\forall N \in \mathbb{N}$ la suite $(g_n(x_N))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_N)$. en effet, la suite $(g_n(x_N))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite la suite $(f_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f dans x_N. Maintenant, montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniformément sur A. Soit $\epsilon > 0$ et δ_ϵ le module correspondant d'équicontinuité de B. Alors écrivons : $A \subset \underset{a\in A}{\cup} B\Big(a, \frac{\delta_\epsilon}{2}\Big]$ et comme A est compact nous avons que $\exists p \in \mathbb{N}$ et $p_1, p_2, \ldots, y_p \in A$ tel que $A \subset \overset{p}{\underset{i=1}{\cup}} B\Big(y_i, \frac{\delta_\epsilon}{2}\Big]$. Mais, par densité de C dans A, nous avons que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\exists x_i \in C \cap B\Big(y_i, \frac{\delta_\epsilon}{2}\Big]$. Comme $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ la suite $(g_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et comme il y a une nombre fini de x_i nous obtenons que $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq M$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, p\}$, $|g_n(x_i) - g_m(x_i)| < \epsilon$. Ainsi, $\forall x \in A$, $\exists i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $\|x - y_i\| < \frac{\delta_\epsilon}{2}$, $\exists x_i \in C$ tel que $\|x_i - y_i\| < \frac{\delta_\epsilon}{2}$. Et nous avons :

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_m(x)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon$$

car $\|x - x_i\| \leq \|x - y_i\| + \|y_i - x_i\| < \frac{\delta_\epsilon}{2} + \frac{\delta_\epsilon}{2} = \delta_\epsilon$. Cela nous donne que que $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m > N_\epsilon$, $\forall x \in A$, $|g_n(x) - g_m(x)| < \epsilon$. And donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m > M$, $\|g_n - g_m\|_{\infty,A} \leq \epsilon$. Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniformément sur $C_b^0(A)$ mais $C_b^0(A)$ est un espace vectoriel de Banach et donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $C_b^0(A)$. Notons f sa limite et comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ nous obtenons que $f \in B$.

□

Deuxième partie

Équations différentielles

Chapitre 4

Conditions suffisantes d'existence et d'unicité des solutions

1. Équations différentielles, formes résolues et réductions à l'ordre 1.

1.1. Généralités.

DÉFINITION 40. *On appelle équations différentielles, toutes équations de la forme :*

$$F : J \times \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_p \to \mathbb{R}^d$$

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p)}(t)) = 0$$

où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle avec $J \neq \varnothing$ et $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_p \subset \mathbb{R}^d$, des ouverts tel que $\Omega_0, \ldots, \Omega_p \neq \varnothing$. Dans cette équation l'inconnue est $y : I \to \Omega_0$ qui est p dérivable sur l'intervalle inconnu $I \subset J$.

Le but de cette partie sera donc de donner des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions ainsi que de décrire la dépendance des solutions aux paramètres. Nous nous intéresseront d'abord au cas général avant de se pencher sur les équation différentielles linéaires.

1.2. Forme résolue.

DÉFINITION 41. *Une équation différentielle $F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p)}(t)) = 0$ est dite normale ou résolue si elle est de la forme :*

$$f : J \times \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{p-1} \to \mathbb{R}^d$$

$$y^{(p)}(t) - f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t)) = 0$$

1.3. Réduction à l'ordre 1.

PROPOSITION 48. *Une équation différentielle normale est toujours équivalente à une équation différentielle du premier ordre :*

$$Y'(t) = g(t, Y(t)) \text{ où } Y(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t)) \text{ et}$$

$$g : J \times \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{p-1} \to (\mathbb{R}^d)^p : (t, y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}, f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}))$$

1.4. Problème de Cauchy.

DÉFINITION 42. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, $y_0 \in \Omega_0$, $t_0 \in I$, alors on appelle problème de Cauchy dans (x_0, t_0) pour l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ le fait de chercher l'intervalle $I \subset J$ contenant t_0 et $y : I \to \Omega$ une dérivable fonction qui est solution de l'équation et telle que $y(t_0) = y_0$.*

1.5. Forme intégrable.

PROPOSITION 49. *Soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue sur $J \times \Omega$ et soit $y : I \to \Omega$ avec $I \subset J$, $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$, alors la fonction y, dérivable sur I, est solution du problème de Cauchy sur I :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow y \text{ est continue sur } I \text{ avec } y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds$$

DÉMONSTRATION. Prouvons les deux implications séparément :

— ($\Rightarrow$) par hypothèse nous avons que y est dérivable sur I, donc y est aussi continue sur I. Par composition avec la fonction f qui est continue sur $I \times \Omega \subset J \times \Omega$ par hypothèse nous avons que :
$$f_* : I \to \mathbb{R}^d : t \mapsto f(t, y(t))$$
est aussi continue sur I. Comme y est une solution de l'équation différentielle nous déduisons que $y' \in C^0(I, \mathbb{R})$ ce qui signifie que $y \in C^1(I, \mathbb{R})$, et, par le théorème fondamental de l'analyse, que $\forall t \in I$:
$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds$$

— ($\Leftarrow$) par hypothèse nous avons que y est continue sur I, et, par composition avec la fonction f, qui est continue sur $I \times \Omega \subset J \times \Omega$ par hypothèse, nous avons que :
$$f_* : I \to \mathbb{R}^d : t \mapsto f(t, y(t))$$
est aussi continue sur I. Et donc nous avons par le théorème fondamental que la fonction :
$$F : I \to \mathbb{R}^d : t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$
est de classe C^1 sur I ce qui signifie que y est C^1 sur I avec $y(t_0) = y_0$ car :
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds = y_0 + F(t)$$
et nous avons que :
$$y'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds = f(t, y(t))$$

$\square$

2. Existence et unicité locale

2.1. Théorème du point fixe.

DÉFINITION 43. *Soit $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espace métrique et soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ alors on dit que f est une contraction si $\exists k \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X$ nous avons que $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$.*

THÉORÈME 25. *(Point fixe de Banach)*
Soit (X, d) un espace métrique, soit $A \subset X$ une partie non-vide complète de X et soit $f : A \to A$ une contraction alors nous avons que $\exists x \in A$, un unique point fixe de f dans A, De plus, la suite définie par récurrence : $x_n + 1 = f(x_n)$ converge vers x, $\forall x_0 \in A$.

DÉMONSTRATION. Prouvons l'existence du point fixe $x \in A$ et alors prouvons que x est unique dans A.
To do que soit $x_0 \in \mathbb{R}$ alors avec la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, nous avons que $\forall n, p \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$= d(f^p(x_n), f^{p-1}(x_n)) + d(f^{p-1}(x_n), f^{p-2}(x_n)) + \cdots + d(f^1(x_n), f^0(x_n))$$

$$\leq k^{p-1}d(f(x_n), x_n) + k^{p-2}d(f(x_n), x_n) + \cdots + k^0 d(f(x_n), x_n)$$

$$= (k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k^0)d(f(x_n), x_n) = \sum_{i=0}^{p-1} k^i d(f(x_n), x_n)$$

Comme nous savons que :

$$d(f(x_n), x_n) \leq kd(f(x_{n-1}), x_{n-1}) \leq k^2 d(f(x_{n-2}), x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(f(x_0), x_0)$$

Nous avons que $\forall n, p \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{i=0}^{p-1} k^i d(f(x_n), x_n) = \Big(\frac{1-k^p}{1-k}\Big) d(f(x_n), x_n) \leq \Big(\frac{1-k^p}{1-k}\Big) k^n d(f(x_0), x_0)$$

$$\leq \Big(\frac{k^n}{1-k}\Big) d(f(x_0), x_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette dernière limite ne dépend pas de $p \in \mathbb{N}$. Tout cela nous donne que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et tel que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans A vers $x \in A$ car (A, d) est a complet par hypothèse. De plus, comme f est une contraction elle est continue sur A et alors en prenant la limite nous avons que :

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = f(x)$$

Ce qui signifie que x est a point fixe de f dans A. Et nous avons que x est unique car si il avait $x_1, x_2 \in A$ tel que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ nous aurions, comme f est une contraction, que :

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd(x_1, x_2) < d(x_1, x_2)$$

ce qui est une contradiction. □

COROLLAIRE 4. *Soit $A \neq \varnothing$ un sous ensemble complet de l'espace métrique (X, d) soit $f : A \to A$, et supposons que $\exists n \in \mathbb{N}_0$ tel que $f^n = fofofo \ldots of$ est une contraction alors $\exists! a \in A$ tel que $f(a) = a$.*

DÉMONSTRATION. Comme f^n est une contraction et par le théorème 24 nous avons que $\exists a \in A$ tel que $f^n(a) = a$ et donc nous avons que $f(a) = f(f^n(a)) = f^n(f(a))$ ce qui signifie que $f(a)$ est un point fixe de f^n et comme ce point fixe est a et est unique nous avons que $f(a) = a$. □

2.2. Cylindres en espace-temps.

DÉFINITION 44. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ alors on dit que f est une fonction de Lipschitz en espace si $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in J$, $\forall y_1, y_2 \in \Omega$ nous avons que :*

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|$$

DÉFINITION 45. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ alors on dit que f est localement une fonction de Lipschitz en espace lorsque $\forall t_0 \in J$, $\forall y_0 \in \Omega$, $\exists \bar{J} \subset J$ un intervalle ouvert qui contient t_0 et $\exists \bar{\Omega} \subset \Omega$ un ouvert tel que $f\Big|_{\bar{J}\times\bar{\Omega}}$ est une fonction de Lipschitz en espace.*

DÉFINITION 46. *Nous définissons $\mathcal{W}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble de toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$, soit $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^d$ alors nous définissons $|||.|||$ tel que $\forall A \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:*

$$|||A||| := \underset{\|x\|=1}{sup} \|Ax\|$$

et nous avons que $|||.|||$ est une norme induite sur $\mathcal{W}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\|Ax\| \leq |||A|||\ \|x\|$.

PROPOSITION 50. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 alors f est localement une fonction de Lipschitz en espace.*

DÉMONSTRATION. Soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, comme $J \times \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$, $\exists \epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $B(t_0, \epsilon[\times B(y_0, \delta[\subset J \times \Omega$ De plus, nous avons que l'ensemble $B\big(t_0, \frac{\epsilon}{2}\big] \times B\big(y_0, \frac{\delta}{2}\big]$ est compact car c'est le produit direct de 2 compacts. Observons que la fonction :

$$f_* : B\bigg(t_0, \frac{\epsilon}{2}\bigg] \times B\bigg(y_0, \frac{\delta}{2}\bigg] \to \mathcal{W}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : (t,y) \mapsto d_y f(t,y)$$

est continue sur $J \times \Omega$ Comme $f \in C^1$ sur $J \times \Omega$. Par conséquent, nous avons que $\exists M(\epsilon, \delta) > 0$ tel que $\forall (t,y) \in B\Big(t_0, \frac{\epsilon}{2}\Big] \times B\Big(y_0, \frac{\delta}{2}\Big]$, $\|d_y f(t,y)\|_{\mathcal{W}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} < M(\epsilon, \delta)$. Maintenant, posons $y_1, y_2 \in B\Big(y_0, \frac{\delta}{2}\Big]$ et nous avons que $\forall s \in [0,1]$, $(sy_2 + (1 - s)y_1) \in \Big(y_0, \frac{\delta}{2}\Big]$ De plus, $\forall t \in B\Big(t_0, \frac{\epsilon}{2}\Big]$ nous avons que :

$$f(t,y_2) - f(t,y_1) = \int_0^1 < d_y f(t, sy_2 + (1-s)y_1), (y_2 - y_1) > ds$$

$$\Leftrightarrow \|f(t,y_2) - f(t,y_1)\| \leq \int_0^1 \|d_y f(t, sy_2 + (1-s)y_1\|_{\mathcal{W}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\ \|y_2 - y_1\| ds$$

$$\leq \int_0^1 M(\epsilon,\delta) \|y_2 - y_1\| ds \leq M(\epsilon, \delta) \|y_2 - y_1\|$$

Ce qui signifie que f est localement une fonction de Lipschitz en espace. □

DÉFINITION 47. *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $l > 0$, et $r > 0$, nous nommons cylindre d'espace temps de center (t_0, y_0) de demi-axe l et de rayon r l'ensemble :*

$$S(t_0, y_0, l, r) := \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid |t - t_0| \leq l \text{ et } \|y - y_0\| \leq r\}$$

PROPOSITION 51. *$S(t_0, y_0, l, r)$ est un compact convexe ce qui signifie que $\forall s \in [0,1]$, $\forall (t_1, y_1), (t_2, y_2) \in S(t_0, y_0, l, r)$, $(st_2 + (1-s)t_1, sy_2 + (1-s)y_1) \in S$.*

PROPOSITION 52. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ localement une fonction de Lipschitz en espace, soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ et soit $l > 0$, $r > 0$ tel que $S(t_0, y_0, l, r) \subset J \times \Omega$ alors f est une fonction de Lipschitz en espace sur $S(t_0, y_0, l, r)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(t, y) \in S(t_0, y_0, l, r)$, comme f est une fonction de Lipschitz locale en espace sur $S(t_0, y_0, l, r)$, nous avons que $\exists \epsilon_{(t,y)} > 0$ et $\delta_{(t,y)} > 0$ tel que f est une fonction de Lipschitz en espace sur $B]t - \epsilon_{(t,y)}, t + \epsilon_{(t,y)}[\times B\big(y, \delta_{(t,y)}\big[$. Comme :

$$S(t_0, y_0, l, r) \subset \bigcup_{(t,y) \in S(t_0, y_0, l, r)} B]t - \epsilon_{(t,y)}, t + \epsilon_{(t,y)}[\times B\big(y, \delta_{(t,y)}\big[$$

et que $S(t_0, y_0, l, r)$ est un compact nous avons que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $(t_i, x_i)_{1 \leq i \leq p} \in S(t_0, y_0, l, r)$ tel que :

$$S(t_0, y_0, l, r) \subset \bigcup_{i=1}^{p}]t_i - \epsilon_{(t_i,y_i)}, t_i + \epsilon_{(t_i,y_i)}[\times B\big(y_i, \delta_{(t_i,y_i)}\big[$$

Maintenant, soit $t \in [t_0 - l, t_0 + l]$ et $y, z \in B\big(y_0, r\big]$ et décomposons le segment $[y, z]$ en prenant $y = y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s = z$ avec $s \geq 2$ et tel que $\forall j \in \{1, \ldots, s-1\}$ le segment $[y_j, y_{j+1}]$ est inclus dans une des boites précédentes $B\big(x_k, \delta_{t_k, x_k}\big[$ et écrivons :

$$f(t,z) - f(t,y) = \sum_{j=1}^{s-1} f(t, y_{j+1}) - f(t, y_j) \Leftrightarrow \big\|f(t,z) - f(t,y)\big\| \leq \sum_{j=1}^{s-1} \big\|f(t, y_{j+1}) - f(t, y_j)\big\|$$

Notons M le maximum p des constantes de Lipschitz en espace et nous avons :

$$\|f(t,z) - f(t,y)\| \leq M \sum_{j=1}^{s-1} \|y_{j+1} - y_j\| = M\|z - y\|$$

La dernière égalité vient du fait que tous les points sont sur une ligne. Et donc nous avons que f est une fonction de Lipschitz en espace sur $S(t_0, y_0, l, r)$. $\square$

DÉFINITION 48. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ alors nous nommons cylindre de sécurité d'espace-temps pour f dans (t_0, y_0) tous cylindres $S(t_0, y_0, l, r) \subset J \times \Omega$ tel que $l \leq \frac{r}{\|f\|_{\infty,s}}$*

PROPOSITION 53. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue sur $J \times \Omega$, alors $\forall (t_0, y_0) \in J \times \Omega, \exists l > 0$ et $r > 0$ tel que $S(t_0, y_0, l, r)$ est un cylindre de sécurité d'espace-temps pour f en (t_0, y_0).*

DÉMONSTRATION. Comme $J \times \Omega$ est un ouvert $\exists l' > 0$ et $r > 0$ tel que $S' = S(t_0, y_0, l', r) \subset J \times \Omega$ et comme f est continue sur le compact S' nous avons qu'elle est aussi bornée sur S' et en posant $l = \min\left(l', \frac{r}{\|f\|_{\infty,S'}}\right)$ nous avons que $S := S(t_0, y_0, l', r) \subset J \times \Omega$ et que $l \leq \frac{r}{\|f\|_{\infty,S'}} \leq \frac{r}{\|f\|_{\infty,S}}$ car $\|f\|_{\infty,S} \leq \|f\|_{\infty,S'}$. Ce qui signifie que $S(t_0, y_0, l', r)$ est un cylindre de sécurité d'espace-temps pour f en (t_0, y_0). $\square$

2.3. Existence et unicité des solutions au problème de Cauchy.

THÉORÈME 26. *(Théorème local de Cauchy-Lipschitz)*
Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction de Lipschitz locale en espace, continue sur $J \times \Omega$. Soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ et soit $S(t_0, y_0, l, r)$ un cylindre de sécurité d'espace-temps pour f dans (t_0, y_0), Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ *admet une solution $\bar{y} \in C^1([t_0 - l, t_0 + l], \Omega)$. De plus, toute autre solution $\tilde{y}$ au problème de Cauchy définie dans $C^1([t_0 - l, t_0 + l], \Omega)$ est équivalent à $\bar{y}$, $\forall t \in [t_0 - l, t_0 + l] \Leftrightarrow \bar{y}(t) = \tilde{y}(t)$.*

DÉMONSTRATION. Pour prouver l'existence de la solution, construisons une suite de fonctions dans $(C^0([t_0 - l, t_0 + l], \mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ et montrons que cette suite converge uniformément sur $[t_0 - l, t_0 + l]$ vers la solution au problème de Cauchy. Maintenant, soit $r > 0$, $l > 0$ et soit $I = [t_0 - l, t_0 + l]$ et définissons :

$$A(I) := \{y \in C^0(I, \mathbb{R}^d) \mid \forall t \in I, \|y(t) - y_0\| \leq r\}$$

Observons que $A(I)$ est fermé dans $(C^0(I, \mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ et donc comme $(C^0(I, \mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ est complet nous avons que $A(I)$ est complet. $A(I)$ est non-vide car il contient $y = y_0$. Posons :

$$T : A(I) \to C^0(I, \mathbb{R}^d) : y \mapsto T_y$$

$$\text{où } T_y : I \to \mathbb{R}^d : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Observons que $\forall y \in A(I)$, nous avons que $T_y \in C^0(I, \mathbb{R}^d)$ Comme f et y are continue sur I. Maintenant, soit see que $\forall t \in I$:

$$\|T_y(t) - y_0\| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right\| \leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f\|_{\infty,(I \times B(y_0,r[)=S}$$

$$\leq |t - t_0| \ \|f\|_{\infty,S} \leq l \ \|f\|_{\infty,S} \leq r$$

la dernière inégalité vient du fait que S est a un cylindre de sécurité d'espace-temps for f dans (t_0, y_0) ce qui signifie que $l \leq \frac{r}{\|f\|_{\infty,S}}$ et donc $\forall y \in A(I)$, $T_y \in A(I)$ Ce qui nous donne que $T(A(I)) \subset A(I)$. Maintenant, observons que $\forall y_1, y_2 \in A(I)$, $\forall t \in I$:

$$T_{y_1}(t) - T_{y_2}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s))ds = \int_{t_0}^{t} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))ds$$

Comme f est une fonction de Lipschitz locale en espace sur $J \times \Omega$ nous avons que elle est une fonction de Lipschitz en espace sur S de constante L. Maintenant, montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\|T_{y_1}^p(t) - T_{y_2}^p(t)\| \leq \frac{L^p (t - t_0)^p}{p!} \|y_1 - y_2\|_{\infty,I}$$

— Pour $p = 1$:

$$\|T_{y_1}(t) - T_{y_2}(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\|ds \leq \int_{t_0}^{t} L\|y_1(s) - y_2(s)\|ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L\|y_1 - y_2\|_{\infty,I} ds = L(t - t_0)\|y_1 - y_2\|_{\infty,I}$$

— Pour la récurrence : supposons que $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$:

$$\|T^p_{y_1}(t) - T^p_{y_2}(t)\| \leq \frac{L^p(t-t_0)^p}{p!}\|y_1 - y_0\|_{\infty,I}$$

Alors nous avons que $\forall t \in I$:

$$\|T^{p+1}_{y_1}(t) - T^{p+1}_{y_2}(t)\| \leq L\int_{t_0}^{t}\|T^p_{y_1}(s) - T^p_{y_2}(s)\|ds \leq L\int_{t_0}^{t}\frac{L^p(s-t_0)^p}{p!}\ \|y_1 - y_2\|_{\infty,I}$$

$$\leq \frac{L^{p+1}}{p!}\left[\frac{(s-t_0)^{p+1}}{p+1}\right]_{t_0}^{t}\|y_1 - y_2\|_{\infty,S} \leq \frac{L^{p+1}}{(p+1)!}(t-t_0)^{p+1}\|y_1 - y_2\|_{\infty,S}$$

Mais il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{(Ll)^{p_0}}{p_0!} \leq 1$ alors nous avons que T^{p_0} est une contraction sur $A(I)$. Ainsi, par la proposition 50, T admet un point fixe $\bar{y}$ dans $A(I)$ ce qui signifie que $T_{\bar{y}} = \bar{y}$ et donc $\forall t \in I$ nous avons que :

$$T_{\bar{y}}(t) = \bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \bar{y}(s))ds$$

et nous avons que $\bar{y}$ est de classe $C^1(I, \mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy. Maintenant, prouvons que $\bar{y}$ est unique dans $I = [t_0 - l, t_0 + l]$ par l'absurde si on dit que $\exists \tilde{y}$ une solution du problème de Cauchy sur l'intervalle $\tilde{I} = [t_0 - l, t_0 + l]$. Maintenant, posons $\hat{y} = \tilde{y}_{[t_0 - l, t_0 + l]}$ nous avons que $\hat{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ et comme S est un cylindre de sécurité de f en (t_0, x_0) nous avons que $\forall t \in I$, $\|\hat{y}(t) - y_0\| \leq r$ et donc $\hat{y} \in A(I)$. Comme $\hat{y}$ est solution nous avons que $T_{\hat{y}} = \hat{y}$, nous déduisons que $\forall t \in I$, $\tilde{y}(t) = \bar{y}(t)$ par unicité du point fixe de T dans $A(I)$. $\square$

REMARK 1. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ tel que $f \in C^k(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ avec $k \geq 1$ alors toutes solutions $y : I \subset J \to \mathbb{R}$ à l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ est de classe C^{k+1} sur I.*

3. Existence et unicité globale

3.1. Bouts droits et bouts gauches.

DÉFINITION 49. *Soit (X, d) un espace métrique de $A \subset X$ on dit que $a \in X$ est adhérent à A lorsque $\forall \epsilon > 0$, $B(a, \epsilon] \cap A \neq \varnothing$.*

DÉFINITION 50. *Soit (X, d) un espace métrique de $A \subset X$ on dit que $a \in X$ est un point d'accumulation de A lorsque $\forall \epsilon > 0$, $\big(B(a, \epsilon]\backslash\{a\}\big) \cap A \neq \varnothing$*

DÉFINITION 51. *Soit X, Y be 2 sets et $f : X \to Y$ nous nommons graphe de f l'ensemble :*

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

DÉFINITION 52. *Soit $\alpha < \beta$ et soit $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ nous nommons bout droit of y tous points d'accumulations du graphe de f, $G(f)$, de la forme (β, z) où $z \in \mathbb{R}^d$. Et nous nommons bout gauche de y tous points d'accumulations du graphe de f, $G(f)$, de la forme (α, z) où $z \in \mathbb{R}^d$.*

3.2. Solutions maximale.

DÉFINITION 53. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$. Soit y_1, y_2 deux solutions du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

respectivement définies sur sur I_1 et I_2, alors on dit que y_2 est une sur-solution de y_1 lorsque :

$$\begin{cases} I_1 \subseteq I_2 \\ \forall t \in I_1, y_1(t) = y_2(t) \end{cases}$$

DÉFINITION 54. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, alorsune solution y du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

définie sur $I \subseteq J$ qui contient t_0 est dites maximal lorsque elle est sa seule sur-solution.

3.3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global.

THÉORÈME 27. *(Théorème de Cauchy Lipschitz Global)*
Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction de Lipschitz locale en espace qui est continue sur $J \times \Omega$. Soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, alors il existe une unique solution maximale y du problème de Cauchy :

$$(\star) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

définie sur $I \subseteq J$, où $t_0 \in I$ et I est ouvert. De plus, les bouts de la solution maximale $y \in \partial(J \times \Omega)$.

DÉMONSTRATION. Notons :

$$\mathcal{I} := \{I_i \subseteq I \mid \text{où } I_i \text{ est un intervalle admettant une solution à } (\star) \text{ qui contient } t_0\}$$

$$N_1 := \{ \text{ extrémités gauches des éléments de } \mathcal{I}\}$$

$$N_2 := \{ \text{ extrémités droites des éléments de } \mathcal{I}\}$$

Maintenant, posons $\alpha = \inf N_1$ et $\beta = \sup N_2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz local, nous avons que $\exists l > 0$ tel que $[t_0 - l, t_0 + l] \in \mathcal{I}$ ce qui signifie que $t_0 - l \in N_1 \neq \varnothing$ et $t_0 + l \in N_2 \neq \varnothing$ et nous avons que $\alpha < t_0 < \beta$, avec $]\alpha, \beta[\subset J$. définissons une solution à $(\star)$ sur $]\alpha, \beta[$ et nous verrons que cette solution est maximal. Définissons la solution sur $[t_0, \beta[$ et répétons le même raisonnement pour les parties de la solution sur $]\alpha, t_0]$. Alors, définissons, y_1 et y_2 deux solutions de $(\star)$ définies sur I_1 et I_2 respectivement et soit $t \in I_1 \cap I_2 \cap [t_0, \beta[$ montrons que $y_1(t) = y_2(t)$. Considérons :

$$A = \{s \in [t_0, t] \mid y_1 = y_2 \text{ sur } [t_0, s]\}$$

observons que $t_0 \in A$ et donc $A \neq \varnothing$ et $A \subseteq [t_0, t]$ donc A est majoré et donc nous pouvons poser $\tau = \sup\ (A)$ alors nous avons que $t_0 \leq \tau \leq t$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz local, nous avons que $\exists l > 0$ tel que la solution à $(\star)$ est unique sur $[t_0, t_0 + l] \subset A$ et donc nous avons que $t_0 \leq t_0 + l \leq \tau \leq t$. Maintenant, montrons que $\tau \in A$. Pour ce faire, soit $0 < \epsilon < \tau - t_0$, nous avons, par définition de τ, que $\exists s_\epsilon \in [\tau - \epsilon, \tau] \cap A$ et donc $y_1 = y_2$ sur $[t_0, s_\epsilon]$ et en particulier $y_1(s_\epsilon) = y_2(s_\epsilon) \Leftrightarrow y_1(\tau - \epsilon) = y_2(\tau - \epsilon)$ et donc par continuité de y_1 et y_2 sur $[t_0, t]$ nous avons qu'elles sont continues dans τ et nous obtenons que :

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_1(\tau - \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} y_2(\tau - \epsilon) \Leftrightarrow y_1(\tau) = y_2(\tau)$$

Ce qui signifie que $\tau \in A$. Maintenant, montrons que $\tau = t$. Par l'absurde, supposons que $\tau < t$. Comme les fonctions y_1 et y_2 sont continues sur $[t_0, t]$ et par le fait qu'elles sont de valeur commune $y_1(\tau) = y_2(\tau)$ car $\tau \in A$, nous avons en considérant le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(\tau) = y_1(\tau) = y_2(\tau) \end{cases}$$

l'existence et l'unicité de la solution à cette équation ce qui signifie que $\exists \tilde{l} > 0$ tel que $y_1 = y_2$ sur $[\tau - \tilde{l}, \tau + \tilde{l}]$ et nous déduisons que $y_1 = y_2$ sur $[t_0, \tau + \tilde{l}]$ ce qui signifie que $\tau + \tilde{l} \in A$ et nous avons une contradiction avec le fait que $\tau = \sup\ (A)$, donc $\tau = t$ et nous avons que $y_1(t) = y_2(t)$ comme voulu. Nous pouvons donc définir $y :]\alpha, \beta[\to \Omega$ une solution de $(\star)$ dans $[t_0, t]$. Maintenant, pour prouver que c'est une solution maximale, supposons que $\tilde{y}$ est aussi une solution à $(\star)$ définie sur $\tilde{I}$ avec $]\alpha, \beta[\subset \tilde{I}$ et $\forall t \in]\alpha, \beta[$, nous avons que $y(t) = \tilde{y}(t)$. Alors si $\exists \tilde{t} \in \tilde{I} \backslash]\alpha, \beta[$ nous avons que $\tilde{t} \in J$ et $\tilde{y}(\tilde{t}) \in \Omega$. Le théorème local de Cauchy-Lipschitz nous dit que $\exists \bar{l} > 0$ tel que nous avons une extension de $\tilde{y}$ sur $[\tilde{t} - \bar{l}, \tilde{t} + \bar{l}]$ et en particulier $\tilde{y}$ (étendue) est une solution de $(\star)$ sur :

$$\begin{cases}]\alpha, \tilde{t} + \bar{l}[& \text{si } \tilde{t} \geq \beta \\ ]\tilde{t} - \bar{l}, \beta[& \text{si } \tilde{t} \leq \alpha \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} \tilde{t} + \bar{l} \in N_2 \\ \tilde{t} - \bar{l} \in N_1 \end{cases} \quad \text{en contradiction avec le fait que } \begin{cases} \beta = \sup\ N_2 \\ \alpha = \inf\ N_1 \end{cases}$$

Nous concluons que $\tilde{I} \cap]\alpha, \beta[= \varnothing$ et tel que $\tilde{I} =]\alpha, \beta[$ ce qui signifie que y est a solution maximale de $(\star)$. Maintenant, pour prouver que y est unique supposons que Y est une solution à $(\star)$ sur $\tilde{I} = |\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}|$ qui contient t_0 avec la construction précédente de Y nous avons que $\alpha \leq \tilde{\alpha}$ et que $\tilde{\beta} \leq \beta$. Si $\tilde{\alpha} \in \tilde{I}$ alors nous avons que nous pouvons étendre cette solution à Y sur $[\tilde{\alpha} - \bar{\bar{l}}, \tilde{\beta}|$ et nous avons une contradiction avec le fait que Y est une solution maximale de $(\star)$. Nous avons le même problème si nous avons que $\tilde{\beta} \in \tilde{I}$ ce qui signifie que $\tilde{I} =]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$ et nous avons que $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[\subseteq]\alpha, \beta[$ mais, par construction, la seule possibilité est $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[=]\alpha, \beta[$ et $y = Y$. Comme la preuve est suffisamment longue, nous admettons le fait que les bout de la solution maximale de $y \in \partial(J \times \Omega)$. □

PROPOSITION 54. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction de Lipschitz locale en espace qui est continue sur $J \times \Omega$. Soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, alors il existe une unique solution maximale y au problème de Cauchy :*

$$(\star) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

définie sur $I \subseteq J$, où $t_0 \in I$ et I est ouvert. Notons $J =]a, b[$ et $I =]\alpha, \beta[$ et donc :

(1) Si $\alpha > a$ alors $\forall K \subset \Omega$ où K est un compact, $\forall (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]\alpha, \beta[^{\mathbb{N}}$ avec $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$, nous avons que :

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid y(t_n) \notin K\} = +\infty$$

(2) Si $\beta < b$ alors $\forall K \subset \Omega$ où K est un compact, $\forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]\alpha,\beta[^{\mathbb{N}}$ avec $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$, nous avons que :

$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid y(t_n) \notin K\} = +\infty$$

DÉMONSTRATION. Nous montrons juste le cas où $\beta < b$, l'autre étant similaire. Par l'absurde, posons que $\exists K \subset \Omega$ compact tel que $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]\alpha,\beta[^{\mathbb{N}}$ avec $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta^-$ et $\#\{n \in \mathbb{N} \mid y(t_n) \notin K\}$ est fini alors nous obtenons que $\#\{n \in \mathbb{N} \mid y(t_n) \in K\}$ est infini. De ce fait, nous avons que $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $y(t_{\varphi(n)}) \in K$ et Comme K est compact nous avons que $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\bar{y} \in K$ avec $y(t_{(\varphi o \psi)(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{y}$ et nous en déduisons que :

$$\Big(t_{(\varphi o\psi)(n)}, y\big(t_{(\varphi o \psi)(n)}\big)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\beta, \bar{y})$$

ce qui signifie que $(\beta, \bar{y}) \in]a, b[\times K$ est un bout droit de la solution maximale y au problème de Cauchy $(\star)$. Mais, par le théorème de Cauchy-Lipschitz global, nous avons que $(\beta, \bar{y}) \in \partial(]a, b[\times\Omega)$, et comme $]a, b[\times\Omega$ est un ouvert nous avons que $]a, b[\times K \cap \partial(]a, b[\times\Omega) = \varnothing$ ce qui est en contradiction avec l'existence de $(\beta, \bar{y})$. $\square$

4. Flot d'une équation différentielle et intégrales premières

4.1. Notion de flot.

DÉFINITION 55. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction de Lipschitz locale en espace qui est continue sur $J \times \Omega$, alors nous définissons le flux de l'équation différentielle pour le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(\tau) = y_1(\tau) = y_2(\tau) \end{cases}$$

comme la fonction (et pas l'application dans ce cas) :

$\phi : J \times J \times \Omega \to \Omega : (t, t_0, y_0) \to$ *les valeurs de la solution maximale de $(\star)$ dans t*

PROPOSITION 55. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ be une fonction de Lipschitz locale en espace qui est continue sur $J \times \Omega$ et soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ alors $\exists \epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $B(y_0, \epsilon[\subseteq \Omega$ et ϕ le flux de l'équation différentielle est une application de $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B(y_0, \epsilon[$. De plus, nous avons que $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ et $\forall y \in B(y_0, \epsilon[$:*

$$\phi(t_0, t, \phi(t, t_0, y_0)) = y_0$$

4.2. Intégrales premières.

DÉFINITION 56. *Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $\tilde{J} \times \tilde{\Omega} \subset J \times \Omega$, alors on dit que $H : \tilde{J} \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ est l'intégrale première de $(\star)$: $y'(t) = f(t, y(t))$ lorsque $H \in C^1(\tilde{J} \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R})$ est constant et :*

$$\frac{dH}{dt}(t, y(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, y(t)) + \nabla H(t, y(t)) f(t, y(t)) = 0$$

4.3. Théorème de Cauchy-Peanö.

THÉORÈME 28. *(Théorème de Cauchy-Peanö)*
Soit $J \neq \varnothing$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\Omega \neq \varnothing$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue sur $J \times \Omega$ et soit $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ alors $\exists \delta > 0$ tel que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset J$ et il existe une solution y du problème de Cauchy :

$$(\star) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

qui est définie sur $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

DÉMONSTRATION. Etendons la fonction f définie sur $J \times \Omega$ au domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ en prenant la fonction :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : (t, y) \mapsto \begin{cases} f(t, y) & \text{si } (t, y) \in J \times \Omega \\ 0 & \text{si } (t, y) \notin J \times \Omega \end{cases}$$

Prenons un suite de régulation $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_k(x)dx = 1$ et Supp $(\rho_k) \subset B\big(0, \frac{1}{k}\big]$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$ nous notons :

$$f_k : J \times \Omega \to \mathbb{R}^d : (t, x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x - y)\rho_k(y)dy$$

nous avons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k \in C^\infty(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ et f_k est une fonction de Lipschitz locale en espace. De plus, $\forall t \in J$ nous avons que $f_k(t, \bullet) \xrightarrow[\text{on tous compacts de}\Omega]{CVU} f$ et donc $f_k \xrightarrow[\text{on tous compacts de} J\times\Omega]{CVU} f$. Ainsi, soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, choisissons $l > 0$ et $\delta > 0$ tel que $S = S(t_0, y_0, l, \delta) \subset J \times \Omega$ et nous avons que :

$$\|f_k\|_{\infty,S} \leq \|f - f_k\|_{\infty,S} + \|f\|_{\infty,S} \leq A$$

où $A \in \mathbb{R}$ est indépendant de k car $f_k \xrightarrow[S]{CVU} f$ et f est continue et donc bornée sur le compact S. Alors nous fixons l tel que $0 < l < \frac{\delta}{A}$ qui peut seulement être plus petit que le précédent. Nous obtenons alors que S est un cylindre de sécurité des fonctions f_k $\forall k \in \mathbb{N}$ et le théorème Cauchy-Lipschitz local nous avons que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\exists! y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_k(s, y_k(s))ds$$

définie sur $[t_0 - l, t_0 + l]$. A partir de là, observons que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction y_k est uniformément bornée sur le domaine $[t_0 - l, t_0 + l]$ car $\forall t \in [t_0 - l, t_0 + l]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|y_k(t)\| \leq \|y_0\| + \delta$ et donc $(\|y_k\|_{\infty,S})_{k\in\mathbb{N}} \leq \|y_0\| + \delta$. De plus, l'ensemble $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est équi-Lipschitz sur $[t_0 - l, t_0 + l]$ car $\forall t_1, t_2 \in [t_0 - l, t_0 + l]$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\|y_k(t_1) - y_k(t_2)\| \leq \int_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)} \|f_k(s, y(s))\|ds \leq A|t_2 - t_1|$$

Et, en particulier, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est équi-continue, Ainsi, par le théorème 23, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $y \in C^0([t_0 - l, t_0 + l], \mathbb{R}^d)$ tel que $y_{\varphi(k)} \xrightarrow[{[t_0-l,t_0+l]}]{CVU} y$. Maintenant, observons que $\forall s \in [t_0 - l, t_0 + l]$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\|f_k(s, y_{\varphi(k)}(s)) - f(s, y(s))\| \leq \|f_k(s, y_{\varphi(k)}(s)) - f(s, y_{\varphi(k)}(s))\| + \|f(s, y_{\varphi(k)}(s)) - f(s, y(s))\|$$

$$\leq \sup_{s\in[t_0-l,t_0+l]} \|f_k(s,y_{\varphi(k)}(s))-f(s,y_{\varphi(k)}(s))\| + \sup_{s\in[t_0-l,t_0+l]} \|f(s,y_{\varphi(k)}(s))-f(s,y(s))\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

En effet, le premier terme converge vers 0 car $f_k \xrightarrow[S]{CVU} f$ et le second aussi converge vers 0 car $y_{\varphi(k)} \xrightarrow[[t_0-l,t_0+l]]{CVU} y$ et $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R})$. Et nous en déduisons que $f_k(\bullet, y(\bullet)) \xrightarrow[[t_0-l,t_0+l]]{CVU} f(\bullet, y(\bullet))$. Ainsi, en prenant la limite, $k \to +\infty$ dans l'égalité :

$$y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_k(s, y_k(s))ds$$

nous obtenons que :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

et nous avons que y est solution du problème de Cauchy $(\star)$. $\square$

Chapitre 5

Systèmes d'équations différentielles linéaires

1. Existence et unicité des solutions globales

1.1. Motivation.

DÉFINITION 57. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-vide et soit $d \in \mathbb{N}_0$, soit $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$: $J \to \mathbb{K}$ et soit $(b_i)_{1 \leq i \leq d} : J \to \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, alors on appelle système d'équation différentielle l'ensemble d'équation :*

$$(\star\star) \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1d}(t)x_d(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2d}(t)x_d(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_d'(t) = a_{d1}(t)x_1(t) + a_{d2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{dd}(t)x_d(t) + b_d(t) \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_d$ sont des fonction scalaires dérivables sur l'intervalle $I \subset J$. Ainsi, en introduisant la notation :

$$A : J \to M_d(\mathbb{K}) : t \mapsto (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq d}$$

$$B : J \to \mathbb{K}^d : t \mapsto (b_i(t))_{1 \leq i \leq d}$$

$$X : J \to \mathbb{K}^d : t \mapsto (x_i(t))_{1 \leq i \leq d}$$

le système $(\star\star)$ peut être écrit comme : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

1.2. Théorème de Cauchy linéaire.

LEMMA 10. *(Lemme de Grönwall)*
Soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ Riemann intégrable sur $[a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ alors si $\forall t \in [a,b]$, $u(t) \leq \alpha + \beta \int_a^t u(s)ds$ nous avons que $\forall t \in [a,b]$, $u(t) \leq \alpha exp\left(\beta(t-a)\right)$.

DÉMONSTRATION. Si $\beta = 0$ alors le lemme est trivial.
Sinon, nous avons que $\beta > 0$, alors en posant :

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} : t \mapsto \left(\frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s)ds\right) exp(-\beta(t-a))$$

nous avons que la fonction $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ et que $\forall t \in [a,b]$:

$$f'(t) = u(t)exp(-\beta(t-a)) - \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s)ds\right) exp(-\beta(t-a))$$

$$= \Bigg[\underbrace{u(t) - \left(\alpha + \beta \int_a^t u(s)ds\right)}_{\leq 0}\Bigg] \underbrace{exp(-\beta(t-a))}_{>0} \leq 0$$

et nous déduisons que f est décroissante sur le segment $[a,b]$ donc $\forall t \in [a,b]$:

$$f(t) \leq f(a) \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s)ds\right) exp(-\beta(t-a)) \leq \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} exp(-\beta(t-a)) + \int_a^t u(s)ds\ exp(-\beta(t-a)) \leq \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta \int_a^t u(s)ds \leq \alpha\ exp(\beta(t-a)) \Leftrightarrow u(t) \leq \alpha\ exp(\beta(t-a))$$

□

THÉORÈME 29. *(Théorème de Cauchy linéaire)*
Considérons le système d'équation différentielle $(\star\star)$ *:* $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$*, si les fonctions* $A : J \to \mathbb{K} : t \mapsto A(t)$ *et* $B : J \to \mathbb{K} : t \mapsto B(t)$ *are continue sur* J *alors* $\forall X_0 \in \mathbb{K}^d$*, il existe une unique solution* X *du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $J =]a,b[\subset \mathbb{R}$ un ouvert alors étendons le domaine de la fonction $f(t,X) : J \times \Omega \to A(t)X + B(t)$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ en prenant la fonction :

$$f(t,X) = \begin{cases} A(a)X + B(a) & \text{si } t \leq a \\ A(t)X + B(t) & \text{si } t \in \text{J} \\ A(b)X + B(b) & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

Observons que $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d, \mathbb{K}^d)$. De plus, f une fonction de Lipschitz en espace en effet, soit $\|.\|$ la norme de $\mathbb{K}^d$ et $|||.|||$ la norme induite sur $M_d(\mathbb{K})$ alors soit $[c,d] \subset J = \mathbb{R}$. Alors les fonctions A et B are continue sur $[c,d]$ et donc elles sont toutes deux bornées ce qui signifie que $\exists M_A, M_B > 0$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|||A(t)||| \leq M_A$ et $|||B(t)||| \leq M_B$. Maintenant, observons que $\forall X, Y \in \mathbb{K}^d$ et $\forall t \in [a,b]$ nous avons que :

$$\|f(t,X) - f(t,Y)\| = \|A(t)X + B(t) - A(t)Y - B(t)\| = \|A(t)(X-Y)\|$$
$$\leq |||A(t)|||\ \|X - Y\| \leq M_A \|X - Y\|$$

Ce qui signifie que f est une fonction de Lipschitz en espace. Alors pour l'espace vectoriel, nous pouvons appliquer le théorème global de Cauchy-Lipschitz sur le problème de Cauchy, et nous savons qu'il existe a unique solution maximale à l'équation $(\star\star)$ et $X(t_0) = X_0$ définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ avec $\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq +\infty$ Pour avoir une solution globale, nous devons juste montrer que $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$. Par l'absurde, posons que $\beta \neq +\infty$ alors nous avons que la solution maximale est définie sur $]\alpha, \beta[$ et donc aussi sur $[t_0, \beta[$ et comme la fonction A et B sont continues sur le segment $[t_0, \beta]$ nous avons qu'elles sont bornées sur ce segment par M_A et M_B respectivement. Alors $\forall t \in [t_0, \beta[$:

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t (A(s)X(s) + B(s))ds$$

car $X \in C^1([t_0, \beta[, \mathbb{K}^d)$ est solution de $(\star\star)$ sur $[t_0, \beta[$ et donc nous avons que :

$$\|X(t)\| \leq \|X_0\| + \int_{t_0}^t (|||A(s)|||\ \|X(s)\| + \|B(s)\|)ds$$

$$\Leftrightarrow \|X(t)\| \le \|X_0\| + M_B(t-t_0) + M_A \int_{t_0}^{t} \|X(s)\| ds$$

$$\Leftrightarrow \|X(t)\| \le \|X_0\| + M_B(\beta-t_0) + M_A \int_{t_0}^{t} \|X(s)\| ds$$

et, par application du lemme 13, sur la fonction continue définie $\forall t_1 \in [t_0, \beta[$ par :

$$u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^+ : s \mapsto \|X(s)\|$$

Nous obtenons que $\forall t \in [t_0, t_1]$, $u(t) \le \exp(\beta(t-t_0))$. Cela nous donne que $\forall t \in [t_0, \beta[$, $\|X(t)\| \le \big(\|X_0\| + M_B(\beta - t_0)\big)\exp(M_A(t-t_0))$. Et alors, comme $\{X(t) \mid t \in [t_0, \beta[\}$ est bornée dans $\mathbb{K}^d$, $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [t_0, \beta[^{\mathbb{N}}$ et $\bar{X} \in \mathbb{K}^d$ tel que $X(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{X}$ alors nous avons que $(\beta, \bar{X})$ est un bout droit de la solution maximale sur $\partial(\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d) = \varnothing$ ce qui est une contradiction avec le théorème global de Cauchy-Lipschitz. $\square$

1.3. Système linéaire homogènes et matrices résolvantes.

DÉFINITION 58. *Considérons le système d'équations différentielles* $(\star\star)$ *:* $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ *on dit que ce système est homogène si* $B(t) = 0 \in \mathbb{K}^d$.

PROPOSITION 56. *Notons :*

$$S_H := \{Y \in C^1(J, \mathbb{K}^d) \mid Y \text{ est une solution à l'équation homogène } (\star\star) \equiv X'(t) = A(t)X(t)\}$$

où la fonction $A : J \to \mathbb{K} : t \mapsto A(t)$ *est continue sur* J.

(1) S_H *est un espace vectoriel.*
(2) $\forall t_0 \in J$ *l'application* $\varphi_{t_0} : S_H \to \mathbb{K}^d : X \mapsto X(t_0)$ *est isomorphisme d'espaces vectoriels.*

DÉMONSTRATION. Le premier point et le fait que ,$\forall t_0 \in \mathbb{R}$, φ_{t_0} est un morphisme sont triviaux. Maintenant, prouvons que ,$\forall t_0 \in \mathbb{R}$, φ_{t_0} est une bijection nous avons juste à utiliser le théorème 28 que l'antécédant par φ_{t_0} de tous $X_0 \in \mathbb{K}^d$ existe et est unique $\forall t_0 \in J$ ce qui signifie que $\forall t_0 \in J$ la fonction φ_{t_0} est a bijection et donc un isomorphisme vectoriel. $\square$

PROPOSITION 57. S_H *est de dimension finie* d.

DÉFINITION 59. *La matrice résolvante for l'équation homogène* $(\star\star)$ *est la matrice définie* $\forall t_0, t \in J$ *by :*

$$R(t, t_0) = Mat(\varphi_t o \varphi_{t_0}^{-1}, \mathbb{B}_C(\mathbb{K}^d)) = Mat(\phi(t, t_0, \bullet), \mathbb{B}_C(\mathbb{K}^d))$$

où ϕ *est le flux de l'équation différentielle pour l'équation* $(\star\star)$ *et* $\mathbb{B}_C(\mathbb{K}^d)$ *est la base canonique de* $\mathbb{K}^d$.

PROPOSITION 58. $\forall t, t_0 \in J$ *nous avons que :*

(1) $R(t, t_0) \in GL_d(\mathbb{K})$
(2) $R(t, s) \times R(s, t_0) = R(t, t_0)$
(3) $[R(t, s)]^{-1} = R(s, t)$

DÉMONSTRATION. Prouvons les trois points séparément :

(1) Observons que φ_t est un isomorphisme vectoriel $\forall t \in J$ par la proposition 58 ce qui signifie que φ_t^{-1} est aussi un isomorphisme vectoriel $\forall t \in J$. Cela nous donne que que $\varphi_t o \varphi_{t_0}^{-1}$ est un automorphisme d'espace vectoriels. Or, $R(t, t_0)$ est la matrice la matrice d'un automorphisme vectoriel nous avons que $R(t, t_0) \in GL_d(\mathbb{K})$.

(2) Nous pouvons voir que :

$$R(t,s) \times R(s,t_0) = \text{Mat } (\varphi_t o \varphi_s^{-1}) \times \text{Mat } (\varphi_s o \varphi_{t_0}^{-1}) = \text{Mat } ((\varphi_t o \varphi_s^{-1}) o (\varphi_s o \varphi_{t_0}^{-1}))$$

$$= \text{Mat } (\varphi_t o (\varphi_s^{-1} o \varphi_s) o \varphi_{t_0}^{-1}) = \text{Mat } (\varphi_t o \varphi_{t_0}^{-1}) = R(t, t_0)$$

(3) Observons que :

$$R(s,t) \times R(t,s) = R(t,t) = \text{Mat } (\varphi_t o \varphi_t^{-1}) = \text{Mat } (Id) = Id$$

$$R(t,s) \times R(s,t) = R(s,s) = \text{Mat } (\varphi_t o \varphi_t^{-1}) = \text{Mat } (Id) = Id$$

$$\Leftrightarrow [R(t,s)]^{-1} = R(s,t)$$

□

DÉFINITION 60. *On appelle système fondamental de solution pour l'équation homogène* $(\star\star)$ *toutes bases de* S_H.

PROPOSITION 59. *Soit* S_H *de dimension* d, *alors les trois points suivants sont équivalent :*

(1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ *est un système de solutions fondamental pour l'équation homogène* $(\star\star)$.

(2) $\forall t \in J$, *det* $(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_d(t)) \neq 0$.

(3) $\exists t_0 \in J$, *tel que det* $(v_1(t_0), v_2(t_0), \ldots, v_d(t_0)) \neq 0$.

DÉMONSTRATION. — $(1 \Rightarrow 2)$ Comme $(\varphi_t(v_1), \varphi_t(v_2), \ldots, \varphi_t(v_d)) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_d(t))$ et comme $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ est une base de S_H et φ_t est un isomorphisme vectoriel nous avons que $\forall t \in J$ $\{v_1(t), v_2(t), \ldots, v_d(t)\}$ est un base de $\mathbb{R}^d$ et tel que $\forall t \in J$, det $(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_d(t)) \neq 0$.

— $(2 \Rightarrow 3)$ $J \neq \varnothing$ et les propriétés du déterminant nous donne le résultat.

— $(3 \Rightarrow 1)$ S'il existe $t_0 \in J$ tel que det $(v_1(t_0), v_2(t_0), \ldots, v_d(t_0)) \neq 0$ alors nous avons que $\{v_1(t_0), v_2(t_0), \ldots, v_d(t_0)\}$ est une base de $\mathbb{K}^d$ et $\varphi_{t_0}^{-1}$ est un isomorphisme vectoriel. Comme $(\varphi_{t_0}^{-1}(v_1(t)), \varphi_{t_0}^{-1}(v_2(t)), \ldots, \varphi_{t_0}^{-1}(v_d(t))) = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ nous avons que $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ est a base de S_H et donc est, par définition d'une solution fondamentale for l'équation homogène $(\star\star)$.

□

DÉFINITION 61. *On appelle matrice fondamentale pour l'équation homogène* $(\star\star) \equiv X'(t) = A(t)X(t)$ *toutes matrices* $V \in C^1(J, M_d(\mathbb{K}))$ *où les colonnes forment une base de* S_H.

PROPOSITION 60. *Si la matrice* $V(t)$ *est une matrice fondamentale et* $R(t, t_0)$ *est une matrice résolvante pour l'équation homogène* $(\star\star) \equiv X'(t) = A(t)X(t)$ *alors nous avons que* $\forall (s,t) \in J^2$ *:*

$$V(t) = R(t,s)V(s) \Leftrightarrow R(t,s) = V(t)V^{-1}(s)$$

PROPOSITION 61. *Soit la matrice $R(t,t_0)$, la matrice résolvante pour l'équation homogène $(\star\star) \equiv X'(t) = A(t)X(t)$ alors nous avons que $\forall t_0 \in J$ the application :*

$$M : J \to M_d(\mathbb{K}) : t \to R(t,t_0)$$

est dérivable sur J et $\forall t_0 \in J$ nous avons l'identité suivante :

$$\frac{dR}{dt}(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$$

PROPOSITION 62. *Soit $R(t,t_0)$, la matrice résolvante for l'équation homogène $(\star\star) \equiv X'(t) = A(t)X(t)$ alors nous avons que pour $t_0 \in J$ l'application :*

$$M : J \to M_d(\mathbb{K}) : t \to R(t,t_0)$$

est dans $C^1(J, M_d(\mathbb{K}))$ et est la seule solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(t_0) = Id \end{cases}$$

PROPOSITION 63. *Soit $B \in M_d(\mathbb{K})$ et soit $h \in \mathbb{C}$ alors nous avons que :*

$$det\ (Id\ + hB) = 1 + h\ \ Tr(B) + \mathcal{O}(h^2)$$

DÉMONSTRATION. Comme $B \in M_d(\mathbb{K})$ nous avons que $\exists P \in M_d(\mathbb{K})$ tel que :

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_d \end{bmatrix} = T$$

Ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} \det\ (\mathrm{Id}\ + hB) &= \det\ (\mathrm{Id}\ + hPTP^{-1}) = \det\ ((P\mathrm{Id}\ + hPT)P^{-1}) = \det\ (P(\mathrm{Id}\ + hT)P^{-1}) \\ &= \det\ (P)\det\ (\mathrm{Id}\ \ + hT)\det\ (P^{-1}) = \det\ (\mathrm{Id}\ \ + hT) \\ &= \begin{vmatrix} 1+h\lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1+h\lambda_2 & * & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+h\lambda_d \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^{d}(1+h\lambda_j) = 1 + h\sum_{j=1}^{d}\lambda_j + \mathcal{O}(h^2) = 1 + h\ \mathrm{Tr}(B) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 64. *Considérons l'équation homogène $(\star\star)$ alors nous avons que $\forall t, t_0 \in J$:*

(1) Equation de Jacobi :

$$\frac{d}{dt}det\ (R(t,t_0)) = Tr\ (A)det(R(t,t_0))$$

(2) Formule de Liouville :

$$det\ (R(t,t_0)) = exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr\ (A(s))ds\right)$$

DÉMONSTRATION. Prouvons les deux points séparément :

— Fixons $t_0 \in J$ et $\Delta : J \to \mathbb{R} : t \mapsto \det(R(t,t_0))$, prenons $t \in J$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $t+h \in J$ alors nous avons que :

$$\Delta(t+h) = \det(R(t+h,t_0)) = \det(R(t+h,t_0)R^{-1}(t,t_0)R(t,t_0))$$

$$= \det(R(t+h,t_0)R^{-1}(t,t_0))\det(R(t,t_0)) = \det(R(t+h,t_0)R^{-1}(t,t_0))\Delta(t)$$

Comme $M : J \to M_d(\mathbb{K}) : t \to R(t,t_0)$ est solution à l'équation :

$$M'(t) = A(t)M(t)$$

nous avons que :

$$R(t+h,t_0) = R(t,t_0)+h\frac{dR}{dt}(t,t_0)+\mathcal{O}(h^2) \Leftrightarrow R(t+h,t_0) = R(t,t_0)+hA(t)R(t,t_0)+\mathcal{O}(h^2)$$

$$\Leftrightarrow R(t+h,t_0)R^{-1}(t+h,t_0) = \mathrm{Id}\ + hA(t) + \mathcal{O}(h^2)$$

Ce qui nous donne que :

$$\Delta(t+h) = \det(\mathrm{Id}\ + hA(t) + \mathcal{O}(h^2))\Delta(t) = (1 + h\mathrm{Tr}(A(t)) + \mathcal{O}(h^2))\Delta(t)$$

$$\Leftrightarrow \Delta(t+h) - \Delta(t) = h\mathrm{Tr}(A(t))\Delta(t) + \Delta(t)\mathcal{O}(h^2) \Leftrightarrow \Delta'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\Delta(t)$$

Ce que l'on voulait prouver.

— Par intégration sur l'équation de Jacobi, qui possible car la fonction $\mathrm{Tr}(A(t))$ est C^0 sur J nous obtenons que :

$$\Delta(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds\right)\Delta(t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))ds\right)$$

□

2. Système inhomogènes, Méthode de variation des constantes

2.1. La structure de l'espace des solutions.

THÉORÈME 30. *Considérons le système non-homogène d'équation différentielles :*

$$(E) \equiv X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec $A(t) \in M_d(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^d$ alors si $A \in C^0(J, M_d(\mathbb{K}))$ et $B \in C^0(J, \mathbb{K})$ nous avons que pour toutes solutions particulières de (E), X_p l'ensemble de toutes les solutions à l'équation, S respecte l'identité suivante :

$$S = S_H + X_p$$

Ce qui signifie que S est un sous-espace affin de $C^1(J, \mathbb{K}^d)$ engendré par S_H et passant par X_p

DÉMONSTRATION. Soit X_p une solution particulière de (E) sur J et $Y \in C^1(J, \mathbb{K}^d)$ alors nous avons que :

$$
\begin{aligned}
& Y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in J,\ Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in J,\ (Y - X_p)'(t) = A(t)[Y(t) - X_p(t)] + B(t) - B(t) \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in J,\ (Y - X_p)'(t) = A(t)[Y(t) - X_p(t)] \\
\Leftrightarrow\ & (Y - X_p) \text{ est une solution à l'équation homogène } (E)
\end{aligned}
$$

□

2.2. Équations scalaire de Wronski.

DÉFINITION 62. *Toutes équations différentielles de la forme :*

$$(E) \equiv y^{(d)}(t) + u_{d-1}(t)y^{(d-1)}(t) + \cdots + u_1(t)y'(t) + u_0(t)y(t) + b(t)$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_{d-1} : J \to \mathbb{K}$ et are C^0 sur J et d'inconnue $y : I \subset J \to \mathbb{K}$, est dite une équation scalaire de Wronski. Si nous notons :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y^{(d-2)}(t) \\ y^{(d-1)}(t) \end{bmatrix},\ B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^d \text{ et } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ u_0(t) & u_1(t) & \cdots & \cdots & u_{d-2}(t) & u_{d-1}(t) \end{bmatrix} \in M_d(\mathbb{K})$$

nous avons que $(E) \equiv Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$

DÉFINITION 63. *Soit $y_1, y_2, \ldots, y_d$, d solutions de l'équation (E) sur J alors nous nommons Wronskien la fonction scalaire définie $\forall t \in J$ par :*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_d)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_{d-1}(t) & y_d(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_{d-1}'(t) & y_d'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{d-2}(t) & y_2^{d-2}(t) & \cdots & y_{d-1}^{d-2}(t) & y_d^{d-2}(t) \\ y_1^{d-1}(t) & y_2^{d-1}(t) & \cdots & y_{d-1}^{d-1}(t) & y_d^{d-1}(t) \end{vmatrix}$$

PROPOSITION 65. *Soit $y_1, y_2, \ldots, y_d \in S_H$ pour l'équation (E) alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
- *$\{y_1, y_2, \ldots, y_d\} \subset S_H$ forme une base de S_H pour l'équation (E).*
- *$\forall t \in J$, $W(y_1, y_2, \ldots, y_d)(t) \neq 0$*
- *$\exists t_0 \in J$ tel que $W(y_1, y_2, \ldots, y_d)(t_0) \neq 0$*

PROPOSITION 66. *Soit $y_1, y_2, \ldots, y_d \in S_H$ pour l'équation (E) alors par la formule de Liouville nous avons que $\forall (t, t_0) \in J$:*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_d)(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} u_{d-1}(s)ds\right) W(y_1, y_2, \ldots, y_d)(t_0)$$

3. Équations linéaires différentielles à coefficients constants

3.1. Rappels d'algèbre linéaire.

DÉFINITION 64. *une matrice $N \in M_d(\mathbb{K})$ est dites nilpotent si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0 \in M_d(\mathbb{K})$.*

PROPOSITION 67. *Soit $N \in M_d(\mathbb{C})$ nilpotent alors $\exists P \in GL_d(\mathbb{C})$ tel que $\exists \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{d-1} \in \{0,1\}$ avec :*

$$P^{-1}NP = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon_{d-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

PROPOSITION 68. *(Décomposition de Dunford)*
Soit $M \in M_d(\mathbb{C})$ alors il existe a unique couple $(D, N) \in M_d^2(\mathbb{K})$ tel que D est diagonal, N est nilpotent avec $M = D + N$ et $ND = DN$.

DÉFINITION 65. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ alors nous nommons bloc de Jordan toutes matrices du type :*

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

THÉORÈME 31. *(Décomposition de Jordan)*
Soit $M \in M_d(\mathbb{C})$ alors $\exists P \in GL_d(\mathbb{C})$ et $J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \ldots, J_{\lambda_d}$ blocs de Jordan tel que :

$$M = P^{-1} \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_d} \end{bmatrix} P$$

De plus, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in Spectrum(M)$ et nous avons que cette décomposition est unique à l'exception d'une permutation de blocs.

3.2. Exponentielle de matrices.

PROPOSITION 69. *Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$ alors la série de puissance de terme général $u_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{A^k}{k!}t^k$ à un rayon de convergence $R = +\infty$.*

PROPOSITION 70. *Comme $M_d(\mathbb{C})$ est complet nous avons que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}t^k$ converge normalement sur tous segments de $\mathbb{R}$.*

PROPOSITION 71. *Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$ alors la fonction :*

$$exp_A : \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{K}) : t \mapsto exp(tA)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et nous avons que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^p}{dt^p} exp(tA) = A^p(tA) = exp(tA)A^p$$

LEMMA 11. *Soit* $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_d(\mathbb{K})$ *, alors :*

$$exp(tN) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPOSITION 72. *Soit $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ alors nous avons que $\forall t \in \mathbb{R}$:*

$$exp(t(A+B)) = exp(tA)exp(tB) \Leftrightarrow AB = BA$$

DÉMONSTRATION. Prouvons les deux implications séparément :

— ($\Leftarrow$) Soit $t \in \mathbb{R}$ alors nous avons que :

$$\exp(t(A+B)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{(k-p)!p!} A^p B^{k-p}$$

La dernière inégalité provient du binôme de Newton et du fait que $AB = BA$ alors nous avons que :

$$\exp(t(A+B)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{(tA)^p}{p!} \frac{(tB)^{k-p}}{(k-p)!} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(tA)^p}{p!} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tB)^k}{k!} \right) = \exp(tA)\exp(tB)$$

Il s'agit du produit de Cauchy de deux séries qui convergent normalement sur les segments de $\mathbb{R}$.

— ($\Rightarrow$) Dérivons $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ deux fois :

$$(\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB))''$$

$$\Leftrightarrow ((A+B)\exp(t(A+B)) = A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)\exp(tB)B)'$$

$$\Leftrightarrow (A+B)^2\exp(t(A+B)) = A^2\exp(tA)\exp(tB) + 2A\exp(tA)\exp(tB)B + \exp(tA)\exp(tB)B^2$$

En prenant $t = 0$ nous obtenons que :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow BA = AB$$

$\square$

3.3. Systèmes d'équations linéaires différentielles à coefficient constants.

PROPOSITION 73. *Si on considère le système d'équations homogène* $Y'(t) = AY(t)$ *où* $A \in M_d(\mathbb{K})$ *est constante* $\forall t \in \mathbb{R}$ *nous avons que la matrice résolvante est la solution à l'équation :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}R(t,t_0) = AR(t,t_0) \\ R(t,t_0) = Id \end{cases} \Leftrightarrow R(t,t_0) = exp\ ((t-t_0)A)$$

PROPOSITION 74. *Soit* $A \in M_d(\mathbb{K})$ *alors nous avons que* $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$.

PROPOSITION 75. *Soit* $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ *et soit* $P \in GL_d(\mathbb{K})$ *tel que* $A = P^{-1}BP$ *alors nous avons que* $\forall t \in \mathbb{R}$ *:*

$$exp(tA) = P^{-1}exp(tB)P$$